目录

第一版序　1
第二版序　2
第三版序　4
技术说明　7
致谢　9

第 1 章　经济问题的描述　1
1. 经济学中的数学方法　1
1.1　概要　1
1.2　数学方法运用中的困难　2
1.3　对目标的必要限制　9
1.4　总结　10
2. 理性行为问题的定性分析　11
2.1　理性行为问题　11
2.2　"鲁滨孙"经济与社会交换经济　14
2.3　变量个数和参与者人数　18

VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

2.4 多个参与者的情况:自由竞争 20
2.5 "洛桑学派"的理论 22
3. 效用的概念 23
3.1 偏好和效用 23
3.2 度量原理的准备性讨论 25
3.3 概率和数字效用 26
3.4 度量原理的详细讨论 30
3.5 数字效用的公理化 36
3.6 公理及其解释 39
3.7 关于公理的一般说明 42
3.8 边际效用概念的作用 45
4. 理论结构:解和行为标准 47
4.1 对于一位参与者来说解的最简单概念 47
4.2 推广到所有参与者 51
4.3 作为分配集的解 52
4.4 不可递的"优越"或"占优"概念 56
4.5 解的精确定义 59
4.6 解的"行为标准"解释 61
4.7 博弈和社会组织 65
4.8 总结 66
第2章 策略博弈的一般形式 70
5. 概论 70
5.1 从经济学到博弈的重点转移 70
5.2 一般分类原则和程序 71
6. 简化的博弈概念 74

6.1 术语解释 74
6.2 博弈的要素 75
6.3 信息和预备关系 77
6.4 预备性、可递性和信号传递 79
7. 完备的博弈概念 84
7.1 每个动作特征的可变性 84
7.2 一般描述 88
8. 集合和分拆 93
8.1 对博弈进行集合论描述的必要性 93
8.2 集合及其性质图示 94
8.3 分拆及其性质图示 97
8.4 集合与分拆的逻辑学解释 101
9. 博弈的集合论描述 103
9.1 描述一个博弈的分拆 103
9.2 分拆及其性质讨论 109
10. 公理化描述 113
10.1 公理及其解释 113
10.2 公理的逻辑讨论 118
10.3 关于公理的一般说明 119
10.4 图示 120
11. 策略和博弈描述的最终简化 123
11.1 策略的概念及其形式化描述 123
11.2 博弈描述的最终简化 127
11.3 在一个博弈的简化型中策略的作用 130
11.4 零和约束的含义 131

第3章 二人零和博弈:理论 132
12. 准备性研究 132
12.1 概论 132
12.2 一人博弈 133
12.3 机会和概率 135
12.4 下一个目标 136
13. 谓词演算 137
13.1 基本定义 137
13.2 最大值和最小值 139
13.3 交换性 143
13.4 混合情况:鞍点 146
13.5 主要结果的证明 149
14. 严格决定的博弈 153
14.1 问题描述 153
14.2 小博弈和大博弈 156
14.3 辅助博弈 158
14.4 结论 164
14.5 严格决定性分析 167
14.6 玩家对换和对称性 171
14.7 非严格决定的博弈 173
14.8 严格决定性的详细分析方案 175
15. 具有完美信息的博弈 176
15.1 目的 176
15.2 严格条件(第一步) 179
15.3 严格条件(完整归纳) 183

15.4　归纳步骤的严格讨论　186
15.5　归纳步骤的严格讨论(续)　191
15.6　完美信息情况下的结果　194
15.7　在国际象棋中的应用　196
15.8　文字讨论　198
16. 直线性和凸性　202
16.1　几何背景　202
16.2　向量运算　204
16.3　支撑超平面定理　210
16.4　矩阵择一定理　214
17. 混合策略:全部博弈的解　221
17.1　两个基本例子　221
17.2　上述观点的推广　223
17.3　上述程序应用于一次具体博弈的理由　226
17.4　混合策略的小博弈和大博弈　229
17.5　广义严格决定性　231
17.6　主要定理证明　235
17.7　纯策略与混合策略方法比较　238
17.8　广义严格决定性分析　242
17.9　良策的其他特征　245
17.10　错误、错误的后果和永久最优　247
17.11　交换玩家:对称性　252
第4章　二人零和博弈的例子　258
18. 一些基本的博弈　258
18.1　最简单的博弈　258

18.2 简单博弈的定量分析 260

18.3 定性的特征化描述 264

18.4 具体例子:硬币配对的推广 268

18.5 更复杂一些的例子 272

18.6 机会和不完美信息 278

18.7 上述结果的解释 282

19. 扑克与诈叫 284

19.1 扑克游戏描述 284

19.2 诈叫 288

19.3 扑克游戏描述(续) 289

19.4 规则的严格描述 291

19.5 策略描述 292

19.6 问题陈述 296

19.7 从离散情况过渡到连续情况 299

19.8 解的数学决定 302

19.9 解的详细分析 308

19.10 解的解释 310

19.11 更加一般的扑克 315

19.12 各手牌离散的情况 316

19.13 m 个可能的叫牌 318

19.14 交替叫牌 320

19.15 全部解的数学描述 327

19.16 解的解释:结论 330

第5章 三人零和博弈 333

20. 准备性研究 333

20.1 一般观点 333
20.2 联盟 335
21. 三人简单多数博弈 337
21.1 博弈描述 337
21.2 博弈分析:“协议”的必要性 338
21.3 博弈分析:联盟和对称性的作用 340
22. 更多例子 342
22.1 不对称分配:补偿的必要性 342
22.2 不同力量的联盟 345
22.3 一个不等式 348
23. 一般情况 351
23.1 详尽讨论:非本质博弈和本质博弈 351
23.2 完全公式化描述 353
24. 关于一个反对意见的讨论 355
24.1 完美信息及其意义 355
24.2 详细讨论:三个或更多个玩家之间补偿的必要性 357
第6章 一般理论的描述:n 人零和博弈 361
25. 特征函数 361
25.1 动机和定义 361
25.2 v(S)概念的讨论 364
25.3 基本性质 365
25.4 直接的数学结果 367
26. 用一个给定的特征函数构造一个博弈 369
26.1 博弈的构造 369

26.2 总结 373
27. 策略等价性:非本质博弈和本质博弈 373
27.1 策略等价性与简化型 373
27.2 不等式和数量 γ 377
27.3 非本质性和本质性 378
27.4 各种准则和不可加效用 380
27.5 本质博弈中的不等式 382
27.6 特征函数的向量运算 385
28. 群、对称性和公平 387
28.1 置换、置换群及其对博弈的影响 387
28.2 对称性和公平 392
29. 三人零和博弈的重新讨论 395
29.1 定性讨论 395
29.2 定量讨论 399
30. 一般定义的严格形式 401
30.1 定义 401
30.2 讨论和简要重述 403
30.3 饱和的概念 406
30.4 三个直接目标 413
31. 结果 414
31.1 凸集、平集和占优关系准则 414
31.2 全部解的系和一元解 423
31.3 与策略等价性相对应的同构 427
32. 本质三人零和博弈的全部解的确定 430
32.1 数学描述和几何方法 430

32.2 全部解的决定 434
33. 结论 438
33.1 解的多样性、歧视及其含义 438
33.2 静态与动态 441
第7章 四人零和博弈 442
34. 准备性研究 442
34.1 概要 442
34.2 本质四人零和博弈的形式化描述 443
34.3 玩家的置换 446
35. 立方体 Q 的一些特殊点的讨论 449
35.1 隅角Ⅰ(和Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ) 449
35.2 隅角Ⅷ(和Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ) 454
35.3 关于 Q 内部的点及其说明 459
36. 主对角线讨论 463
36.1 隅角Ⅷ的邻近:试探性讨论 463
36.2 隅角Ⅶ的邻近:严格讨论 467
36.3 主对角线的其余部分 475
37. 中心及其周围 477
37.1 中心周围情况概述 477
37.2 两种选择及对称性的作用 480
37.3 中心点处的第一选择 481
37.4 中心点处的第二选择 483
37.5 两个中心解的比较 485
37.6 不对称的中心解 486
38. 中心点邻近的一族解 489

38.1 属于中心点处第一种选择的解及其变换 489
38.2 严格讨论 492
38.3 上述解的解释 501
第8章 关于 $n \geqq 5$ 博弈的一些说明 505
39. 各类博弈的参数个数 505
39.1 $n=3,4$ 的情况 505
39.2 $n \geqq 3$ 的情况 506
40. 对称五人博弈 508
40.1 对称五人博弈的形式体系 508
40.2 两种极端情况 509
40.3 对称五人博弈与1、2、3对称四人博弈之间的关系 512
第9章 博弈的合成与分解 519
41. 合成与分解 519
41.1 全部解能够被决定的 n 人博弈 519
41.2 第一个类:合成和分解 520
41.3 严格定义 523
41.4 可分解性分析 526
41.5 修改的必要性 529
42. 理论的修改 530
42.1 零和条件的不完全放弃 530
42.2 策略等价:常数和博弈 530
42.3 新理论中的特征函数 534
42.4 新理论中的分配、占优和解 536
42.5 新理论中的本质性、非本质性和可分解性 538

43. 分解分析 541

43.1 裂集和成分博弈 541

43.2 全部裂集的系的性质 542

43.3 全部裂集的系的特征与分解分析 544

43.4 分解分析的性质 547

44. 可分解博弈:理论的进一步推广 550

44.1 一个可分解的博弈的解及其成分的解 550

44.2 分配和分配集的合成与分解 551

44.3 解的合成与分解:主要结果 554

44.4 理论的推广:外部来源 557

44.5 剩余 559

44.6 对剩余的限制:新结构中一个博弈的非孤立特征 562

44.7 新结构 $E(e_0)$和 $F(e_0)$的讨论 563

45. 对剩余的限制和扩展的理论结构 566

45.1 剩余的下限 566

45.2 剩余的上限:独立分配和完全独立分配 567

45.3 关于两个界限的讨论:它们的比率 571

45.4 独立分配与各种解 575

45.5 定理证明 577

45.6 总结 583

46. 一个可分解的博弈全部解的决定 586

46.1 分解的基本性质 586

46.2 分解及其与解的关系:有关 $F(e_0)$的初步结果 589

46.3 连续性 592

46.4 连续性 596

46.5 $F(e_0)$中的全部结果 599

46.6 $E(e_0)$中的完全结果 602

46.7 部分结果的图示 605

46.8 解释:正常区域和各种性质的遗传性 607

46.9 哑玩家 610

46.10 博弈的嵌入 611

46.11 正常区域的意义 615

46.12 转移现象的首次出现:$n=6$ 618

47. 新理论中的本质三人博弈 619

47.1 讨论的必要性 619

47.2 预备性分析 619

47.3 六种情况讨论:情况(Ⅰ)—(Ⅲ) 624

47.4 情况(Ⅳ):第一部分 625

47.5 情况(Ⅳ):第二部分 629

47.6 情况(Ⅴ) 635

47.7 情况(Ⅵ) 638

47.8 结果的解释:解中的曲线(一维部分) 640

47.9 连续性:解中的区域(二维组成部分) 642

第10章 简单博弈 644

48. 胜利联盟、失败联盟及其出现的博弈 644

48.1 41.1中的第二个类:联盟的决策 644

48.2 胜利联盟与失败联盟 646

49. 简单博弈的特征描述 649

49.1　胜利联盟与失败联盟的一般概念　649
49.2　一元集的特殊作用　653
49.3　实际博弈的 W、L 的特征描述　655
49.4　简单博弈的严格定义　658
49.5　简单博弈的一些基本性质　658
49.6　简单博弈及其 W、L：最小胜利联盟 W^m　659
49.7　简单博弈的解　661
50. 多数博弈和主解　663
50.1　简单博弈的例子：多数博弈　663
50.2　齐次性　667
50.3　分配的概念在求解中的更直接运用　669
50.4　直接方法　670
50.5　与一般理论的联系：严格阐述　673
50.6　结果的重新描述　677
50.7　结果解释　680
50.8　与齐次多数博弈的联系　682
51. 全部简单博弈的枚举方法　684
51.1　概论　684
51.2　饱和法：借助 W 来枚举　686
51.3　从 W 到 W^m 的理由：使用 W^m 的困难　689
51.4　改变后的方法：借助 W^m 的枚举　693
51.5　简单博弈与分解　697
51.6　非本质博弈、简单博弈和博弈的分解：剩余的处理　700
51.7　W^m 意义上的可分解性准则　701

52. n 较小时的简单博弈 705

52.1 $n=1,2,3$ 的情况 705

52.2 $n\geqq 4$ 时的二元集及其在 W^m 分类中的作用 706

52.3 情况 C^*、C_{n-2} 和 C_{n-1} 的可分解性 708

52.4 (有哑玩家的)不同于 $[1,\cdots,1,l-2]_h$ 的简单博弈: $C_k, k=0,1,\cdots,n-3$ 712

52.5 $n=4,5$ 713

53. $n\geqq 6$ 的简单博弈及其新情况 715

53.1 $n<6$ 时的有规律性 715

53.2 六个主要反例($n=6,7$) 717

54. 适宜博弈中全部解的确定 728

54.1 简单博弈不同于主解的解 728

54.2 全部解已知的博弈的枚举 729

54.3 分析简单博弈 $[1,\cdots,1,n-2]_h$ 的理由 731

55. 简单博弈 $[1,\cdots,1,n-2]_h$ 732

55.1 准备性说明 732

55.2 占优和首要玩家:情况(Ⅰ)和(Ⅱ) 733

55.3 情况(Ⅰ)的解决 735

55.4 情况(Ⅱ): $\underline{V}$ 的确定 739

55.5 情况(Ⅱ): $\overline{V}$ 的确定 743

55.6 情况(Ⅱ): $\mathscr{A}$ 和 S_* 747

55.7 情况(Ⅱ′)和(Ⅱ″):(Ⅱ′)的解决 749

55.8 情况(Ⅱ″): $\mathscr{A}$ 和 V′占优 752

55.9 情况(Ⅱ″):V′的确定 754

55.10 情况(Ⅱ′)的解决 762
55.11 完全结果的重新阐述 766
55.12 结果的解释 769
第11章 一般非零和博弈 777
56. 理论的扩展 777
56.1 问题描述 777
56.2 虚构玩家:零和扩展 $\overline{\Gamma}$ 779
56.3 有关 $\overline{\Gamma}$ 的特征的一些问题 781
56.4 $\overline{\Gamma}$ 的运用所受到的限制 784
56.5 两种可能的过程 788
56.6 有歧视的解 789
56.7 其他情况 791
56.8 新结构 793
56.9 Γ 是零和博弈情况的重新分析 796
56.10 占优概念分析 801
56.11 严格讨论 807
56.12 解的新定义 811
57. 特征函数及相关问题 813
57.1 特征函数:扩展型和受约束型 813
57.2 基本性质 814
57.3 全部特征函数的确定 817
57.4 可去除玩家集 821
57.5 策略等价:零和博弈与常数和博弈 825
58. 特征函数的解释 830
58.1 定义分析 830

58.2 获益欲与损人欲 831
58.3 讨论 833
59. 一般分析 836
59.1 方案讨论 836
59.2 简化型和不等式 837
59.3 各种各样的题目 841
60. $n \leqq 3$ 一般博弈的解 845
60.1 $n=1$ 的情况 845
60.2 $n=2$ 的情况 846
60.3 $n=3$ 的情况 848
60.4 与零和博弈的比较 854
61. $n=1,2$ 时结果的经济学解释 855
61.1 $n=1$ 的情况 855
61.2 $n=2$ 的情况:二人市场 855
61.3 二人市场及其特征函数的讨论 858
61.4 第 58 节中观点的正当理由 861
61.5 可分割的物品:"边际对" 862
61.6 价格 866
62. $n=3$ 时结果的经济学解释:特殊情况 869
62.1 $n=3$ 时的特殊情况:三人市场 869
62.2 预备性讨论 871
62.3 解:第一种子情况 872
62.4 解:一般形式 876
62.5 结果的代数形式 877
62.6 讨论 879

63. $n=3$ 时结果的经济学解释：一般情况 882
63.1 可分物品 882
63.2 有关不等式的分析 885
63.3 准备性讨论 888
63.4 解 889
63.5 结果的代数形式 892
63.6 讨论 894
64. 一般市场 897
64.1 问题描述 897
64.2 一些特殊性质：垄断和买方垄断 899
第12章 占优与解的概念扩展 903
65. 扩展：特殊情况 903
65.1 问题描述 903
65.2 一般说明 905
65.3 排序、可递性和非周期性 906
65.4 对称关系和完备排序的解 910
65.5 半排序的解 912
65.6 非周期性和严格非周期性 915
65.7 对于一个非周期关系来说的解 921
65.8 解的惟一性、非周期性和严格非周期性 925
65.9 应用于博弈：离散性和连续性 929
66. 效用概念的推广 931
66.1 推广：理论描述的两个阶段 931
66.2 第一个阶段的讨论 932
66.3 第二个阶段的讨论 934

66.4 统一两个阶段的可取之处 937

67. 一个例子 938

67.1 描述 938

67.2 解及其解释 942

67.3 推广：不同离散效用刻度 946

67.4 有关讨价还价的结论 949

附录：效用的公理化描述 951

A.1 问题描述 951

A.2 基于公理的推导 953

A.3 总结说明 969

人名索引 976

词条索引 979

译者后记 1017

第1章　经济问题的描述

1. 经济学中的数学方法

1.1　概要

1.1.1　本书的宗旨是讨论经济学理论的一些基本问题，讨论这些问题所使用的方法不同于迄今为止文献中已有的方法。我们将着重分析的是经济行为研究中的一些基本问题，而这些经济行为是经济学家们长期以来一直关注的焦点。这些问题源于经济学家试图严格地描述个人效用最大化或企业家利润最大化的行为。众所周知，即便其中只涉及诸如双方垄断、双头垄断、寡头垄断和自由竞争等典型情况下二人或多人之间的直接或间接的商品交换，要完成这一任务，我们也会遇到相当大的困难，甚至会遇到一些难以克服的困难。我们希望弄清楚的一点是，经济系的每个学生都熟悉的这些问题，其结构在很多方面与人们目前的想像有很大的不同。另外，我们还将发现，这些问题的严格界定和求解只能借助于一些特殊的数学方 *1*

法进行，而这些方法完全不同于老一代数理经济学家或现代数理经济学家们所使用的传统方法。

1.1.2 我们的思考将把我们引向"策略博弈"(games of strategy)的数学理论应用上。这一理论是我们两人在1928年、1940至1941年相继发展起来的。① 阐明这一理论之后，我们将按照前面所说明的那样将其运用于
2 经济学问题研究。这一理论将为一系列尚未解决的经济学问题提供一种全新的思考方法。

首先，我们必须以某种方式把博弈论与经济理论联系起来，并找出它们之间的共同之处。为此，我们首先简要地描述一些基本的经济学问题的本质，以使我们认清这些共同的要素。这将使我们明白，它们之间的联系不是随意的拼凑，相反，博弈论是建立经济行为理论的最恰当的方法。

我们的讨论仅仅指出了这两个领域之间的相似之处，我们的意图有可能因此而被误解。我们希望，在给出若干个合理的公式之后，读者会认识到，典型的经济行为问题完全等价于恰当的数学概念上的"策略博弈"。

1.2 数学方法运用中的困难

1.2.1 恰当的做法也许是首先描述经济理论的本

---

① 这一工作第一阶段的成果已经出版：冯·诺伊曼(J. von Neumann)，"Zur Theorie der Gesellschaftsspiele"，《数学年刊》第100卷(1928)，第295—320页。这一理论的后续完善和上述文章中的想法的更详尽的说明首先出现在本书之中。——1,①——表示该注条在原版书中的页码和编号。书中所提注条的所在均指原版书中的编序。——译者注

质，然后再简要地说明数学在经济学理论发展中的作用。

第一，我们要意识到，目前还不存在一个大一统的经济学理论体系，即便这样一个体系有一天能够发展起来，也不是我们这一代人所能够看到的事情。理由很简单，经济学是一门十分复杂的科学，它的建设可能不是在短期内一蹴而就的事情，更何况经济学家们对其所研究的现象所知还十分有限、描述也很不全面。只有那些未能认识到这一现状的人才有胆量尝试建立一个大一统的体系。在远比经济学先进得多的物理学中，目前也不存在这样一个统一的体系。

下面，我们来比较一下经济学与物理学：偶尔，某一物理理论看似为一个统一的体系提供了基础，但迄今为止，这类例子都不过是昙花一现，最多持续 10 年。物理学家们每天的工作肯定不是为了建立这样一个大一统的体系，而是致力于一些具体问题的研究。如果真的强调这一超乎寻常的标准，物理学大概不会有任何进步。物理学家们注重研究个案问题，在这些案例中，有些具有重大实际意义，有些则不那么有意义。也许，原本分崩离析、相距甚远的诸多领域的统一会取代这类工作，然而，这类幸事毕竟少见，并且只有在各领域被研究透彻了之后才会发生。考虑到经济学作为一门科学远比物理学复杂和困难得多、更难为人们所理解，并且尚处于早期发展阶段，因此，我们显然不应该指望经济学已经超过了上面所描述的物理学现状。

第二，我们必须注意到，不同的科学问题迫使我们尝试不同的分析方法，其中有些方法后来因为更好的方法的

出现而被摒弃。这一点有着重要意义:在某些经济学分支中,最富有成果的工作或许正是那些认真而有耐心的描述性工作。其实,这也许是现在或不远的将来,我们所要做的最主要的工作。换句话说,以一种缜密的方式发展一种理论是可能的,为此,数学的运用是必需的。

事实上,数学已经在经济学理论中得到了广泛运用,甚至过于广泛的运用。不过,到目前为止,这些应用都不太成功。这一点与我们在其他学科中看到的情况形成了鲜明的对比:在数学被运用得十分成功的大多数学科中,
3 这些学科的进步甚至离不开数学。这一现象的解释十分简单。

1.2.2 数学本不应该被运用于经济学的说法其实并没有多少站得住脚的理由。一种常见的观点是:数学之所以在经济学中无用武之地,是因为存在着所谓不可度量的重要因素,即人的因素和心理因素等。这些观点是错误的,我们完全可以对之嗤之以鼻。今天以数学作为主要分析工具的很多领域中在几百年以前都有过——或许曾经有过——此类反对意见。这里,"或许曾经有过"的意思是:让我们设想我们生活在物理学的数学化或近乎数学化前夕,即16世纪;在化学和生物学的发展中,这一时期是18世纪。在这些时期,物理学和生物学的境况还不如今天的经济学——经济学毕竟已经有了一些发展,因此,基于这些理由而怀疑数理经济学显然是站不住脚的。

关于大多数重要因素无法度量的观点,热理论提供了一个最具说服力的例子。在数学理论发展之前,热的测量并不比今天的经济学更令人乐观。热量和质量(能量和温

度）的精确度量是数学理论发展的结果，而不是其前奏。与此相比，在经济学中，价格、货币和利率，这些定量的和严格的概念早在几百年前就已经发展起来了。

反对在经济学中使用定量度量的另一种意见是，强调经济量缺乏无限可分性，从而认为处理无穷小量的微积分无法得到运用。这一观点也是站不住脚的，因为物理学和化学中有原子理论，电动力学中有量子等，在这些学科分支中，数学分析取得了众人皆知的成就，并不断取得成功。

这里，我们还应该提到在经济学文献中常见的另外一种观点，它也有可能作为反对数学方法的一种理论。

1.2.3　为了说明将要运用于经济学的概念，我们已经从物理学方面给出了一些讨论，我们将继续这样做。基于各种各样的理由，很多经济学家反对进行这样的比较。有人断言，经济学理论无法像物理学那样建立模型，因为它是一门关于人类社会现象的科学，从而必须把心理因素 4
等考虑进去。我们认为，这类说法至少是不成熟的。毫无疑问，一个合理的做法是，找出引导其他科学进步的因素，并探寻同样的原理是否也会引导经济学的进步。如果说经济学需要运用不同于其他学科的原理的话，那么，这也只能由经济理论的实际发展过程来揭示。这本身就是一项重大变革。不过，可以断言的是，我们还没有达到这一阶段——这并非意味着经济学需要完全不同的科学原理的那一天永远也不会到来。物理学的方法导致了物理科学的建立，以不同于物理学方法的其他方法来研究我们的问题是十分不明智的。

1.2.4　数学没有在经济学中取得成功肯定是另有理

由。主要原因是一些不利的环境因素的共同作用,而它们当中的一些是可以逐步消除的。首先,许多经济问题一直没有被表述清楚,并且常常是用模棱两可的术语表述的,由于问题到底是什么都相当不确定,以至于给人的第一印象是进行数学处理是毫无希望的。当概念和问题本身不清楚的时候,精确的方法的确无用武之地。因此,我们的首要任务是,通过更细心的描述把问题弄清楚。不过,即使是在问题描述较令人满意的经济学领域,数学工具也极少得到恰当的运用。原因在于,它们要么没有得到充分发展——如在试图决定一个一般均衡状态时只计算方程式和未知数的个数;要么只是完成了从文字表达到符号表达的转换,没有后续的数学分析。

其次,经济科学的经验基础是不充分的。当我们要把有待分析的问题数学化时,我们关于经济事实的知识与物理学中的相应知识仍然无法比拟。事实上,在物理学中,具有决定性的转折发生在17世纪,尤其是在力学领域。其所以成为可能,是因为此前天文学的发展,它的背后是几千年系统而科学的天文观察。具有独一无二才能的布拉赫(Tycho de Brahe)[1]代表着天文观察的顶峰。这样的事情在经济科学中还没有发生过。在物理学中,没有布拉赫,就不可能有开普勒和牛顿;我们更没有理由指望经济学会轻而易举地发生飞跃。

---

① 丹麦天文学家,进行了大量天文观察(其观察资料为开普勒行星运动三定律奠定了基础),并发现了黄赤交角变化、月球运动的二均差等。——译者注

这些浅显的评述当然不应该被理解为是对统计经济研究的贬低。统计经济研究的发展为数学在经济学中的应用朝着正确方向前进带来了希望。

由于上述环境因素的共同作用,数理经济学尚未取得重大成功。数学是一种有着强大解释力的工具,但其不充 5
分和不恰当的运用却无法消除潜在的模糊性和无知。

由此出发,我们可以把我们的立场表述为:本书的宗旨不是进行经验学的研究。经济科学在这方面的进步显然还非常有限,但其必要性无论怎么强调也不过分。人们也许抱有这样的希望,即由于科学技术的进步和其他领域取得的经验,描述性经济学的发展历程将不会像天文学那样漫长。但是,不管怎样,这肯定不是一个按照预先计划能完成的任务。

我们将尽力利用有关人类行为的一般经验,这些人类行为适合数学研究并具有经济学上的重要性。

我们相信,这些现象得到数学处理的可能性是对1.2.2节中提到的“基本”反对意见的有力反驳。

然而,我们将会看到,这一数学化的过程并不总是轻而易举的。实际上,上面所提到的那些反对意见,也许有相当大的部分是来自直接数学化过程中可能遇到的显著困难。

我们将会看到,我们必须利用数理经济学中迄今为止还没有使用过的数学技术,而且进一步的研究很有可能引致新的数学分支的创立。

最后,我们还有可能看到,经济学理论的数学处理之所以不尽如人意,主要根源是这样一个事实:它提供的不

是证明，而是断言，且同一断言的数学表述实际上并不比其文字表述更好。缺乏证明的原因在于一种数学方法所尝试的领域过于庞大和过于复杂，以至很长时期以来——在获得大量新知识之前——几乎没有任何理由指望在经济学的数学化方面取得突破。经济波动理论和生产的时间结构理论就属于这类领域。这一事实说明，大量由此而产生的困难被低估了。它们在数量上是巨大的，而我们现在还没有对付它们的办法。

1.2.5 我们曾提到过数学成功地运用于一个新的学科可能带来的数学技术——事实上，数学本身——的那些变化的实质和可能结果。正确预见到这些变化是重要的。

我们绝不要忘记，这些变化有可能是十分重要的。数学在物理学中运用的决定性阶段——牛顿创立一个合理的力学分支——既带来了微积分的发明，更与微积分的发展密不可分。（存在着若干其他例子，但都不如这个例子更有说服力。）

6 社会现象的重要性、财富及其表现形式的多样性以及它们结构的复杂性绝不亚于物理学中那些相应的东西。因此，我们预计，甚或担忧，要在这一领域取得突破，必须要有足以与微积分的发明相提并论的新的数学发明。（顺便说一句，正是出于这种精神，我们当前的努力必须打一些折扣。）更不容置疑的是，仅仅重复我们在物理学中的成功做法，不大可能使我们在面对社会现象时取得同样的成功。这种可能性的确很渺茫，我们将证明，我们的讨论会遇到一些新的数学问题，这些问题完全不同于我们在物理学中所遇到的那些问题。

由于人们现在过于强调把微积分和微分方程等当作数理经济学的主要工具，因此，这些观察结果更应该被牢记在心。

1.3　对目标的必要限制

1.3.1　我们不得不先回到前面所提到的观点上：我们必须从已经描述清楚了的问题开始，即使从另外一个角度看，这些问题本来不那么重要。还应该指出的一点是，对这些较为简单的问题的研究所带来的也许只是众所周知的结果，但这些结果的严格证明无论如何是从未有过的。在给出这些结果之前，不存在堪称科学理论的理论。在星球的运行轨道被牛顿理论计算出来并得到解释之前，人们已经知道了星球的运动。其他领域中也发生过这样的事情，只不过不那么引人注目罢了。与此相类似，在经济学理论中，有些结果也是已知的，比如双头垄断结果的不确定性。然而，从一套严格的理论中推导出它们仍是有意义的。对于已经建立起来的经济学理论，我们也能够这么说，而且也应该这么说。

1.3.2　最后，还应该补充的一点是，我们不打算思考所研究问题的实践意义，因为这属于我们在前面所提到的理论领域的选择问题。在这方面，经济学与其他科学并没有什么不同。在这些科学漫长而富有成果的发展时期，从实践的角度看，最重要的问题也许根本没有被触及到。经济学中的情况肯定也是这样。如何稳定经济，如何增加国民收入，或如何合理地分配国民收入，这些问题都是非常重要的，没有人能够真正回答这些问题，我们也不必故弄

玄虚，假装这些问题已经有了科学的答案。

一门科学有其终极目标，也有与其终极目标相比而言的适中的问题，每当在这些问题的研究中发现了能够不断得到推广的方法，这门科学的飞跃就到来了。自由落体运动是一种很不起眼的现象，但正是对这一极为简单的事实
7 的研究及其与天文观察资料的对比，产生了力学。

对于我们来说，判断问题适中性的同一标准也应该适用于经济学，那种试图"系统地"解释所有经济现象的做法是徒劳的。恰当的做法是首先在一个有限的领域中做到精确和详尽，并由此进入另一个更广阔的领域，如此依次进行。这样还可以避免那些带有负面影响的理论实践，即把所谓的理论运用于其不适用的经济或社会改革之中。

我们相信，我们必须尽可能多地了解个人的行为和最简单的交换形式。边际效用学派的创立者正是采取了这一立场，并取得了令人瞩目的成功，不过，这一观点到现在还没有被广泛接受。经济学家常常提出一些过大和过于"棘手"的问题，而全然不顾那些有碍他们对这些问题做出陈述的任何事情。较早得到发展的学科——如物理学——的经验表明，急于求成只会阻碍进步，也阻碍对那些"棘手"问题的研究。我们没有理由认为在经济学中存在着一条捷径。

1.4 总结

1.4 经济学家们不能指望自己有比其他科学分支中的科学家更好的命运，认识到这一点非常必要。可以预见的是，经济学家必须首先研究那些包含在经济生活中的最

简单的问题，并努力建立一个能够解释这些问题的和真正符合精确科学标准的理论体系。我们能够满怀信心地说，从此以后，经济科学将会顺利发展，并逐步地把一些更为重要的问题纳入其中。①

这一起始阶段必然是试探性的，即从非数学的貌似合理的想法向正式的数学过程转变。最后确立的理论必须具有数学的严密性和概念的一般性。我们必须将其首先应用于对一些基本问题的解释中，这些问题的答案是人们从未怀疑过的，而且是不需要借助理论解释就可以获得的。在早期阶段，应用是为了使这一理论更加准确。当理论被应用于较为复杂的情况时，会在一定程度上超出我们熟悉的范围，并变得不那么易于理解，这时，我们就进入了 8
另一个阶段。在这里，理论和应用验证相互促进。这一阶段之后才是真正的成功：真正根据理论做出预测。众所周知，所有数学化了的学科都无一例外地经历了这些发展阶段。

2. 理性行为问题的定性分析

2.1　理性行为问题

2.1.1　经济理论的主题是极具复杂性的价格和生

① 实际上，这一出发点是有一定意义的，因为少数人之间的交换形式与我们在现代工业社会中观察到的最重要的交换形式或国际贸易中国家之间的易货贸易是相同的。——7，①

产、收入的投入产出机制。在经济学的发展进程中，人们发现，而且今天公认的是，研究这一庞大问题的方法之一是从分析组成经济社会的个人行为开始。在很多方面，这一分析已经走得相当远。尽管存在着很多分歧，也无论困难有多么大，这一方法的意义都是不容置疑的。不过，即使我们应该且必须首先限于静态经济分析，也仍然存在很多困难。主要困难是恰当地描述关于个人动机的公理。这些公理是无法回避的。传统上，这一问题被表述为：消费者追求最大效用或满足，企业家追求最大利润。

众所周知，要把效用这个东西界定清楚并加以应用是非常困难的，要将其描述为一个数字则更为困难。解决这些困难并非这本著作的目标。不过，在有些情况下，我们又不得不对其进行讨论，尤其在3.3和3.5节中。关于这个重要而有意义的问题，本书的观点将主要是机会主义的。我们要着重分析的问题并不是效用或偏好的度量问题，因此我们将尽可能合理地简化其他特征。我们将假设经济系统中所有参与者——消费者和企业家——的目的只是金钱或某种货币商品。我们假设这种商品具有无限可分性、完全可替代性、可以自由转移，甚至在数量上等价于每个参与者所渴望的“满足”或“效用”。（关于效用的数量特征，见上面提到的3.3节。）

有些经济学文献认为，根本没有必要讨论效用和偏好的概念，因为这些纯属没有经验观察结果的文字游戏，即套套逻辑。但是，对于我们来说，在数量分析的意义上，这些概念的重要性并不亚于物理学中明确建立起来的一些
9 概念，如力、质量和电荷等。也就是说，它们的直接形式是

定义，但通过建立于其上的理论，它们则由经验决定——且没有其他途径。因此，效用概念在这些经济理论中的地位就不仅仅是套套逻辑了，而是这些经济理论要运用它，且结果是能够与经验或至少能够与常识相对照的。

2.1.2 追求这些目标最大化的个人也被认为具有“理性的”行为。但是，我们可以有把握地说，目前并不存在关于理性行为问题的令人满意的答案。例如，有可能存在若干实现最优状态的途径，它们依赖于个人具有的知识和理解力。对所有这些问题的定性研究不可能详尽无遗地描述它们，因为它们必然包含着数量关系。因此，我们有必要对其进行定量描述，以使所有定量描述的因素都被考虑进去。这是一项极为艰巨的任务。我们可以有把握地说，在关于这一题目的浩如烟海的文献中，这一任务还远远没有完成。主要原因在于还未能针对这一问题发展出一套数学的分析方法，并将其正确运用。这表明，假设的伴随理性行为而产生的最大值问题还没有被描述清楚。事实上，较为详尽的分析（见 4.3—4.5 节）表明，这些重要关系远比大众和哲学家们使用的“理性”一词所包含的内容更为复杂。

关于个人行为的一个有价值的初步定性描述是由奥地利学派提出的，尤其关于与世隔绝的“鲁滨孙”（Robinson Crusoe）一个人组成的经济。我们也会偶尔提到伯姆巴沃克（Böhm-Bawerk）关于两个人或多个人之间的交换的一些看法。个人选择理论较近期的阐述是无差异曲线分析方法，它也建立在同样的事实或所谓事实之上，不过，这一方法通常被认为有诸多优越性。对此，我们更倾

向于2.1.1和3.3中的讨论。

然而,我们希望从一个完全不同的角度来研究交换问题,以实现对这一问题的真正理解。这一全新的角度正是"策略博弈"(game of strategy)。我们的方法即将清楚展现出来,尤其在一些概念得到正确的定量描述之后。这些概念已经在一些学者的著作中得到发展,比如伯姆巴沃克。不过,他的观点或许只能被当作这一理论的一个原型。

2.2 "鲁滨孙"经济与社会交换经济

2.2.1 让我们更深入地研究"鲁滨孙"模型所代表的那种经济。这是与世隔绝的一个人的经济,或者说是完全按照一个人的意志组织起来的经济。这一经济有着特
10 定数量的商品和若干有待满足的需要,问题是如何实现最大满足。其实,这是一个普通的极值问题,尤其考虑到我们前面已经证明了的关于效用特征的公理。这一问题的困难显然依赖于变量个数和要最大化的函数性质。不过,这更多地表现为实践中的困难,而不是理论上的困难。[①] 如果对连续生产和消费随时间延续(常常使用耐用消费品)这一事实进行抽象,就有可能得到最简单的模型。它被假设为经济理论的重要基础,不过,这一企图——奥地利版本的一个显著特征——常常会遭到质疑。用关于一个孤立的人的这一极简单模型作为一个社会交换经济的理论基础,必然会招致如下反对意见:这一模型并不代表

---

① 对于下面的内容来说,这一理论是否全面并不重要。——10,①

一个在许多方面都会受到社会影响的人。因此，有人说，如果一个人的选择是在一个社会中做出的，那么，他会受到模仿、广告、习俗等诸多因素的影响，关于他的分析就完全不同于对“鲁滨孙”的分析。这些因素肯定会造成重大不同，不过，关键问题是，它们是否改变最大化过程的形式上的性质。事实上，还从未有人证明有这种影响存在，加之我们仅仅关注的是最大化问题，因此，我们也不必考虑上述社会影响。

“鲁滨孙”与一个社会交换经济参与者之间的某些不同并不会影响我们的分析。例如，在前一情况中不存在充当交换媒介的货币，只存在一个计价标准，任何商品都可以用于这一目的。我们在2.1.2中假定的数字效用或货币的效用概念已经消除了这一困难。我们重申：我们的兴趣在于这样一个事实：做出这些极端简化之后，“鲁滨孙”所面对的只是一个形式上的问题，这一问题与一个社会经济的参与者所面对的问题有着本质不同。

2.2.2　我们假设“鲁滨孙”有一组给定的物理数字（有待满足的需要和商品），他的任务是以某种方式使用它们，以实现满足最大化。毫无疑问，他完全控制着决定结果的所有变量，如资源的分配、决定同一种商品在不同需要中的使用等。①

因此，“鲁滨孙”面对的是一个普通的极大值问题，正

---

① 有时，不可控制的因素也会出现，如农业中的气候。不过，这些纯属统计现象，因此能够通过众所周知的概率计算过程加以消除：即确定各种可能结果的概率和“数学期望”的概念。其对效用概念的影响见3.3。——10，②

如我们在前面指出的那样，其困难纯粹是技术性的，而不是概念性的。

2.2.3 现在，我们考虑社会交换经济中的一位参与
11 者，他的问题当然与一个极大值问题有很多共同之处。不过，其中也包含一些很基本的、本质上完全不同的要素。他也追求最优结果，但是，为了实现这一目的，他必须与其他人发生交换关系。如果两个或多个人之间相互交换商品，那么，对于每一个人来说，结果不仅取决于他本人的行为，还取决于其他人的行为。因此，每一个参与者都试图最大化一个函数（前面所说的结果），其中的变量并不全然由他控制。这肯定不再是一个极大值问题，而是若干极大值问题的一个令人惊奇和令人茫然不知所措的混合。每一个人都受到另外一个原则的指导，并且无法确定影响其利益的所有变量。

这类问题是经典数学从未遇到过的。我们也许有点故弄玄虚地强调，这并不是函数分析等条件极值问题，也不是各种各样的微积分问题。很明显，即使是在最“基本的情况”下，如所有变量只能够有有限个取值，这类问题也会产生。

对这一极值问题存在许多误解，其中一个最严重的误解是如下一个非常有名的说法，即社会经济活动的目的是“为尽可能多的人提供尽可能多的商品”。因此同时满足两个（或多个）函数最大化要求的单一指导原则是不可能建立起来的。

毫不夸张地说，这样一个指导原则是自相矛盾的。（一般来说，当一个函数在某处有极值时，另一个函数在此

处没有极值。)这如同一个厂商应该在资金周转最快时有最高价格还是在支出最小时有最大销售收入之类的说法。如果这些原则的重要性有一个顺序,或者把它们加权平均的话,矛盾就消失了。然而,在一个社会交换经济中,这样的事情是不存在的,因为各个参与者同时都在追求各自的极大值。

有人错误地认为,这样的困难是能够克服的,就像第10页脚注②中"鲁滨孙"借助概率理论这一工具来消除其困难那样。每一位参与者都能够确定的是描述他本人行为的变量,但他无法确定描述他人行为的变量。从某一个人的角度看,那些有关"他人"的变量是无法由统计学来假设和描述的。这是因为,其他人,像他本人一样,也都受着理性原则的指导,无论这些原则具体意味着什么。不理解这些原则和所有参与者相互冲突的利益之间的相互影响,任何方法都不可能是正确的。

有时,这些原则中的一些会存在或多或少的一致性,那么,我们会接近于有一个简单的极值问题。但是,它们也可能是相互对立的。一个具有一般性的理论必须考虑到所有可能情况、所有中间情况及其所有组合。

2.2.4　"鲁滨孙"的想法肯定不同于社会交换经济中一个参与者的想法,关于这一点可以以如下方式来说明:除了他能够控制的那些变量之外,"鲁滨孙"面对的是 *12*
一些"死的"数据;它们是这一情况中不可改变的物质背景。(即便它们明显是变量,如第10页脚注②说明的那样,它们事实上也受到固定不变的统计学规律的支配。)他所面对的数字中,没有一个反映的是另外一个人的经济愿

望或企图。社会交换经济中的每一个参与者则不得不面对反映其他人的经济愿望的数据:这些数据是其他参与者的行为或(价格之类的)选择的结果。他对这些数据的预期将会影响他的行为;反过来,这些数据又反映了其他参与者对他的行为的预期。

因此,关于"鲁滨孙"经济的研究以及适用于他的那些方法,在经济理论中的价值要比迄今为止人们所认识到的更为有限。其理由并不在于我们在前面提到的那些社会关系——尽管我们还没有对它们的意义提出怀疑,而是在于起初的("鲁滨孙"的)极值问题与上面所提到的较为复杂的问题之间存在着概念上的不同。

希望上面的分析能够使读者相信,我们面对的是概念上的困难,而不仅仅是技术上的困难。"策略博弈"理论正是为了解决这一困难而建立的。

2.3 变量个数和参与者人数

2.3.1 在上一节用于说明一个社会交换经济的形式结构中,我们需要用一定个数的"变量"来描述这一经济中参与者的行为。因此,每一个参与者被指定一组变量——"他的"变量——用于描述他的行为,即他的愿望的准确表达形式。我们称这些集合为*部分变量集*。所有参与者的部分变量集合起来构成全部变量的集合,称为*全集*。因此,总变量个数取决于参与者即部分变量集的个数和每个部分变量集中变量的个数。

从纯数学的角度看,把一个部分变量集的所有变量当作一个变量并无不妥,有关这个参与者的变量对应着这个

部分变量集。事实上，这是我们在后面的数学讨论中经常用到的做法。在概念上，它绝对不会造成任何差异，而且将大大简化符号。

然而，在这里，我们建议暂时还是要区别每个部分变量集中的各个变量，自然地发展起来的经济模型都会有这样一个过程。因此，我们提倡用变量逐一描述每个参与者希望获得每种商品的数量。

2.3.2 我们必须强调的是，参与者部分变量集中变 13
量个数的任何增加都会使问题变得更加复杂，但这只是技术上的复杂。在一个"鲁滨孙"经济中，只有一个参与者和一个同时是全集的部分变量集。变量个数的增加会使极值的确定在技术上更为困难，但是，它不改变这一问题纯属一个极大值问题的特征。另一方面，如果参与者的个数，即部分变量集的个数增加了，那么，在本质上完全不同的事情就会发生。用后面的博弈论术语说，这意味着博弈中玩家个数的增加。简单地说，一个三人博弈根本不同于一个二人博弈，而一个四人博弈根本不同于一个三人博弈。在以后的分析中，我们将会看到，随着参与者个数的增加，这一问题的组合复杂性也会增加，正如我们在前面所看到的那样，它甚至不再是一个极值问题。

我们已经进入这一问题的一些细节性讨论，因为大多数经济学模型所描述的现象往往是这两类现象的稀奇古怪的混合。每当玩家，即社会交换经济的参与者的个数增加时，这一经济系统的复杂性通常也会随之增加。比如，交换商品和服务数量的增加和使用的生产过程更为复杂

等。这样,每个参与者的部分变量集中的变量个数很有可能随之增加。但是,参与者的个数,即部分变量集的个数也增加了,因此,上述两个原因以相同比例增加总的变量个数。想像出其中每一个的确切作用非常必要。

2.4 多个参与者的情况:自由竞争

2.4.1 在2.2.2—2.2.4中,我们详细比较了一个"鲁滨孙"经济和一个社会交换经济。我们强调,当存在适度个数的参与者时,即当其个数大于1时,后者的特征将变得更为突出。每个参与者受到预料之中的他人对其行为做出的反应的影响。对所有参与者来说,事情都是这样。这是双头和寡头垄断等经典问题中尚未解决的最大困难。当参与者的个数真的变得很大时,就出现了每个参与者的影响小得可以忽略不计的希望,上述困难就会消失,传统的经济学理论就会成为可能。当然,这些正是"自由竞争"的经典条件。的确,这是一切经济学理论的出发点。与大量卖者——自由竞争——这一情况相比,少数卖者的情况——垄断、双头垄断和寡头垄断——成了例外和非正常情况。(即使是在这些情
14 况中,考虑到买者之间的竞争,参与者的个数仍然很大。真正的小个数情况是双边垄断、一边垄断一边寡头、两边都是寡头的情况。)

2.4.2 关于这一传统观点,有如下公正说法:一个众所周知的现象是,在精确学科和物理学中,极大个数的情况常常比中等个数的情况更容易对付。关于包含10^{25}个分子的一团气体的精确理论远比关于九个主要天体组成

的太阳系的精确理论容易，更比关于三个或四个同样大小的星球组成的系统的理论容易。这当然归于在前一情况中应用统计和概率规律的可能性。

然而，对于我们的问题来说，这一类比还远远不够全面。关于 2，3，4，… 个物体的力学理论是人所共知的，而且其一般理论形式（有别于其个别的和计算上的形式）是大数统计学理论的基础。对于社会交换经济——即“策略博弈”这一等价体，有关 2，3，4，… 个参与者的理论还不存在。我们的上述讨论正是为了这一要求，而且我们以后的研究就是要努力满足这一要求。换句话说，只有当关于中等个数的参与者的理论得到了令人满意的发展，才有可能确定极大个数参与者是否是一种简化情况。让我们重述：由于上述与其他领域的类比，使我们有了这样一种希望，即这样的简化的确会发生。有关自由竞争的现有断言是对结果的一个很有价值的推测和很有诱惑力的预期。但是，它们不是结果，当上述条件没有得到满足时，将其作为结果在科学上是不成立的。

有大量经济学文献试图说明，存在着（交换比率的）
一个不确定的中间区域，它随着参与者人数的增加而逐步 15
变窄并趋于消失。这就提供了一个向自由竞争——参与者个数极大——这一理想情况的渐进过程，这时，所有的解都是惟一地决定的。我们希望这一情形具有一般性，但是，我们不能认为类似这一观点的任何事情已经结论性地建立起来了。无法逃避的步骤是：我们必须就小个数参与者的情况描述、解决和理解这一问题，然后才有可能说明大数极限（如完全竞争）情况下问题的特征是否会发生

变化。

2.4.3 我们需要从根本上重新审视这个题目,因为仅仅参与者个数的增加最终总能够导致自由竞争的说法既是不肯定的,也是不可能的。在自由竞争的经典定义中,除了参与者个数很大之外,还包含着其他假设。例如,如果一些大的组织出于某种理由联合起来采取行动,那么,大个数参与者这一条件显然也就无效了。"决定性"的交换有可能发生在少数大的"联盟"内部①,而不是在大量独立行事的个人之间。我们后面关于"策略博弈"的讨论表明,"联盟"的作用和规模在这整个题目中始终是决定性的,因此,上述困难仍旧是一个重要问题。任何有关从小个数参与者到大个数参与者"极限转变"的理论如果要令人信服,都必须解释这样一个问题:在什么环境中,这类大的联盟不会形成。也就是说,在什么情况下,大个数参与者这一条件会变得有效,并导致一定程度的自由竞争。在这些可能结果中,何者将会出现取决于问题中的物理数据。我们认为,如何回答这一问题,对于任何自由竞争理论来说,都是一种真正的挑战。

2.5 "洛桑学派"的理论

2.5 在结束这一节之前,我们必须提到洛桑学派的一般均衡理论和其他各种各样的理论体系,这些理论体系考虑了单个的"个人计划"和相互联系着的"个人计划"。

① 如工会、消费者合作组织、工业卡特尔和政治圈子中可以想像到的某些组织。——15,①

这些理论体系注意到了社会经济参与者之间的相互依存关系。然而，这是在有着广泛的约束条件下完成的。有时，自由竞争是假设条件，这时，参与者面对的是固定不变的条件，其行为就像"鲁滨孙"一样，专心致志于自己的满足最大化。在这些条件下，每个人的满足是相互独立的。在其他一些情况中，引入了其他约束条件，目的是排除各类参与者自由形成"联盟"。关于参与者之间的利益一致和利益对立如何影响参与者的行为，使其合作或有其他表现，常常存在着明确的假设，尽管有时这些假设被隐藏了起来。我们希望我们已经说明了，这样一个过程中的一个逻辑错误是，把未经证明的东西当作了论据，至少在我们希望对其进行讨论的层面上是这样。它回避了真正的困难，是在做文字游戏，而不是真正解决问题。当然，我们并不怀疑，这些研究还是有意义的，不过，它们的确没有能够回答我们的问题。

3. 效用的概念

3.1　偏好和效用

3.1.1　我们已经在2.1.1中指出，希望用一个相当宽泛的效用概念来描述个人偏好这一基本概念。很多经 16
济学家会认为，我们假设得太多(见我们在2.1.1做出的假设)，相对于"无差异曲线"这一现代技术方法来说是一种倒退。

在给出具体讨论之前，作为一个一般理由，我们声明，我们的方法最坏也不过是经典的基本分析方法：通过简化和公式化来分解困难，即为了集中解决一个困难（正在进行的研究适合解决的问题），尽量合理地减少其他困难。还应该指出的一点是，关于偏好和效用的这一武断假设，将在我们讨论的主要内容中得到应用。不过，我们也会研究，如果回避这一假设的话，会给我们的理论带来什么影响（见 66 和 67 节）。

然而，我们认为，我们假设的一部分——即把效用当作是可度量的数量——其影响并不像经济学文献中通常认为的那么严重。我们将在下面的章节中证明这一点。我们希望读者原谅，我们仅仅简短地讨论效用这一如此重要的概念。由于效用的可度量性问题类似于物理学中具有相似特征的问题，所以，下面几点简要说明也许是非常有意义的。

3.1.2 历史地看，效用最初被假设为能够被定量地度量，即被假设为一个数字。针对这一观点的最初形式，站得住脚的反对意见是提得出来的，并且已经被提出来了。显然，每一种度量——毋宁说每一可度量性——必定最终基于某种直觉，这一直觉无法、并且肯定没有必要被进一步分析。① 至于效用，关于一件（或一组）物品和另一件（或一组）物品的偏好的直接感觉就提供了这样的基础。但是，这仅仅允许我们就同一个人来说，在同一时刻，一件物品的效用大于另一件物品的效用，它无法成为就某

① 如物理学各分支学科中对光、热和肌肉力之类的感觉。——16，①

一个人进行效用的数字比较的基础，更无法成为不同人之间效用比较的基础。这是因为，对于同一个人来说，不存在任何在直觉上有意义的方法把两个效用相加，说效用不具有数字特征似乎更合理。无差异曲线分析这一现代方法是描述这种情形的一个数学过程。

3.2　度量原理的准备性讨论

3.2.1　所有这些不由使人想起早期热理论中的情形：它也基于一个物体比另外一个物体更热这一个在直觉上非常清楚的概念，不过，并没有直接的方法来清楚地表达热多少、热多少倍或在什么意义上更热。

与热理论的比较还说明，关于这样一种理论最终会 17
变成什么样子，一个人能够先验地预测到的东西是多么有限啊！正如我们已经知道的那样，上述粗略的说明并不代表后来实际发生的事情。后来发生的事情是，热是能够被度量的，但不是由一个数字度量，而是由两个数字度量：热量和温度。前者是数字性的描述，因为它表现出可相加性，并且以一种未曾预料到的方式联系着机械能，而机械能总是数字性的。后者也是数字性的，但更为微妙，它在任何意义上都不是可相加的，但是，关于它的一个严格数字刻度却因对一种具有一致行为的理想气体的研究而产生了，并且绝对温度的作用联系着熵定理(entropy theory)。

3.2.2　热理论的发展历史表明，在对任何概念做出最终的否定断言时，都必须十分小心。今天看来，效用是非数字性的，但是，热理论的发展史也许会在效用理论中

重演，没有人能够预言它会有哪些衍生后果和不同的表现形式。① 我们应该鼓励从理论上解释一个数字效用的形式上的多种可能性。

3.3 概率和数字效用

3.3.1 我们还可以再前进一步，超越上述双重否定——那只是对数字效用的不可能性这一不成熟断言的警告。我们能够证明，基于无差异曲线分析所依据的基础，只需稍做努力就可以得到数字效用。

我们曾多次指出，数字效用取决于对效用差异进行比较的可能性。与假设能够说明偏好相比，一个更为宽泛的假设是能够对效用差异做出比较。但是，经济偏好必定是关于各种选择机会的偏好，这些选择机会允许我们忘却这一区别。

3.3.2 让我们暂时接受下面关于一个人的描述：他的偏好体系是无所不包的和完备的，即对任意两件物品或想像中的任意两个事件，他总有清楚的直觉上的偏好。

更确切地说，对于摆在他面前的任意两个可供他选择的东西，他总能够说出他偏好其中哪一个。

这一情形的一个十分自然的推广是，允许这样一个人不仅能够比较两个事件，而且能够比较具有明确概率的不同事件组合。②

① 光、颜色和波长理论的全然不同发展就是这类广泛可能性的一个很好例子。所有这些概念也成了数字性的，但方式截然不同。——17，①

② 如果他从事明显依赖于概率的经济活动，那么，这一点的确是必需的。见第10页脚注②。——17，②

这里，两个事件的组合的意思是：假设 B 和 C 分别是两个事件，为简单起见，其出现的概率各为50%，那么，它 18
们的一个"组合"是以50%的概率 B 发生，而且（如果 B 不发生）以（余下的）50%的概率 C 发生。我们强调，这两个事件是相互排斥的，这样，其他与之互补的事件都不可能发生。还有，B 和 C 之一肯定发生。

重申我们的观点。我们期望，这个人在直觉上清楚他倾向于事件 A、事件 B 和 C 的50—50组合中的哪一个。显然，如果他认为 A 优于 B 且 A 优于 C，那么，A 优于 B 和 C 的组合。同样，如果他认为 B 优于 A，且 C 也优于 A，那么，B 和 C 的组合优于 A。但是，如果他认为 A 优于 B，同时 C 优于 A，那么，要断言 A 优于 B 和 C 的组合就必须获得更多信息。具体来说：如果他认为 A 优于 B 和 C 的50—50组合，那么，这为偏好强度的数字估计提供了一个合理的基础，即对 A 与 B 之中他偏好 A 的程度超过 C 与 A 之中他偏好 C 的程度。[①②] 如果接受了这一观点，那么，就存在着一个尺度，根据这一尺度来比较 C 优于 A 的程度和 A 优于 B 的程度。如此一

---

① 用一个简单的例子来说：假设一个人认为一杯茶优于一杯咖啡，而一杯咖啡优于一杯牛奶。如果要想知道后一偏好在程度上是否超过前者——即效用差异，我们只需将他置于如下必须做出决定的环境之中：一只杯子中是咖啡，另一只杯子中50%的概率是茶，50%的概率是牛奶。——18，①

② 注意，我们仅仅做出了有关个人直觉的假设，即允许决定偏好两个"事件"之中的哪一个。但是，我们并没有假设如何估计两个偏好的相对强度大小——即用后面的术语来说，效用的差。

这一点是重要的，因为通过"提问"，前一种信息应该能够以一种重复的方式获得。——18，②

来，效用——毋宁说效用的差——就变得可以用数字度量了。

只需对 A、B 和 C 做出这种程度的比较就足以提供“距离”的数字度量。在经济学中，这一结果首先为帕累托(Pareto)发现。在数学中，关于直线上点的位置，欧几里得(Euclid)给出了与此完全相同的观点——事实上，这是他那经典的数字距离的推导的重要基础。

如果所有可能的概率都得到使用，数字度量的引入甚至能够弄得更直接：考虑三个事件，C、A 和 B，关于这三个事件的个人偏好顺序是我们在前面说明的顺序。令 α 是一个界于 0 与 1 之间的实数，B 发生的概率等于 $1-\alpha$，余下 C 发生的概率等于 α，这使得渴望 A 的程度与渴望 B 和 C 的组合的程度相等。然后，用 α 作为 A 优于 B 的程度对 C 优于 B 的程度的比率的数字估计。① 这些
19 想法的严格而详尽说明需要运用公理化方法。对这一基础的简单处理的确是可能的。我们将在 3.5—3.7 论述它。

3.3.3 为避免误解，我们在这里明确指出，上面作为偏好基础的“事件”是未来事件，以使所有逻辑上可能的各种结果同样值得考虑。不过，就我们当前的目标来说，考虑关于未来不同时期的事件的偏好问题则是毫无必要

① 这为另一个例子提供了良好的机会。上述技术允许直接确定拥有 1 单位某种商品的效用相对于占有 2 单位同一种商品的效用的比率 q。这个人必须面对如下选择机会：确定地得到 1 单位；以概率 α 得到 2 单位或有 $1-\alpha$ 的概率什么也得不到。如果他倾向于前者，那么，$\alpha < q$；如果他倾向于后者，那么，$\alpha > q$；如果他不能说出他倾向于何者，那么，$\alpha = q$。——18，③

的复杂化。[①] 然而，这类困难是可以消除的，为此，我们只需把我们在同一个标准化的时刻感兴趣的"事件"都放在最近的未来。

概率通常被设想为一个主观概念，本质上或多或少是一种估计。由于我们打算用它来建立个人效用的数字估计，上述概率观点就无法服务于我们的目的。因此，最简单的办法是坚持概率是长期频率的解释。这样就直接提供了必要的数字基础。[②]

3.3.4 个人效用的这一数字度量方法当然有赖于个人偏好系统的完备性假设。[③] 可以想像出这样的情况，个人既不能够说出两个选择机会中他偏好哪一个，而且对它们的渴望程度又不相等。这种情况甚至以某种方式变成现实。在这种情况下，无差异曲线分析将无法运用。[④]

对于个人和组织来说，这种可能性到底有多么真实似乎是一个极为有趣的问题，不过，它的确是一个有关事实的问题，值得进一步研究。我们将在3.7.2中重新讨论它们。

无论如何，我们希望我们已经解释清楚了，无差异曲线要么包含的内容太多；要么太少：如果个人偏好是完全 20

---

① 众所周知，这联系到储蓄和利息理论。这类关系很有意思且极难捉摸。——19，①

② 如果你反对关于概率的频率解释，那么，这两个概念（概率和偏好）可以一起被公理化。这也带来了一个令人满意的数字效用概念。我们将在后面有机会讨论它。——19，②

③ 我们还没有获得不同人的效用的定量或定性比较的基础。——19，③

④ 这类问题纯属数学中的有序集理论。上述问题尤其等于这样一个问题，即根据偏好，事件是否形成一个完备或半序集。见65.3。——19，④

不可比较的，那么，无差异曲线也就不存在[①]；如果个人偏好是完全可比的，那么，我们就能够获得一个（惟一界定的）数字效用，无差异曲线就成了多余的东西。

当然，对于能够计算（货币）成本和利润的企业家来说，所有这些都没有意义。

3.3.5 一种可能的反对意见是，关于效用的可度量性的这些繁琐细节都是不必要的，因为我们要描述的普通人并不严格计算其效用，他的经济活动是在相当模糊的情况下决定下来的。当然，他关于光、热和肌肉努力等的行为也是这样。但是，为了建立一门物理科学，这些现象必须得到度量。其后，个人则不得不直接或间接地——甚至在其日常生活中——使用这类度量。经济学中也许也会有这么一天。一旦建立了使用这一工具的经济理论，在这一理论的帮助下，做到对经济行为的较为充分的理解，那么，个人生活也许就会受到实质性的影响。因此，研究这些问题并非是不必要的繁琐细节。

3.4 度量原理的详细讨论

3.4.1 读者也许会认为，基于上述内容，我们惟有求助于假设一个刻度的存在来得到效用的数字刻度。我们在 3.3.2 中曾经指出，如果一个人认为 A 优于概率各为 50% 的 B 和 C 的组合（同时 C 优于 A 且 A 优于 B），这为

---

① 位于同一条无差异曲线上的点必须是完全等同的，从而不存在不可比的情况。——20，①

如下数字估计提供了合理的基础：在 A 与 B 中偏好 A 的程度大于 B 与 C 中偏好 C 的程度。这里，我们是否在假设——或理所当然地认为——一个偏好大于另一个偏好，即这一说法传递了某种含义？这一观点完全误解了我们的分析方法。

3.4.2　我们并没有做出这样的假设，其实，我们只假设了这样一件事情，即想像中的事件能够与概率结合起来，而且，这一做法有着充分的经验证据。因此，关于赋予事件的效用，我们也必须做出同样的假设，无论这些事件是什么。

用更为数学化的语言来说：科学中常有事情是，先验的而非数学的数量被赋予物理世界的特定方面。偶尔，这些数量能够被归类在一个域中，在这个域之内，特定的、自然或物理地定义的运算（physically defined operation）是可能的。因此，物理地定义的“质量”允许加法运算。物理几何地定义的“距离”[①]这一数量允许同样的运算。另一方面，物理几何地定义的“位置”则不允许加法运算[②]，但 21
是它允许建立两个位置的“重心”这一运算[③]。再有，其他物理几何地定义的概念，如通常表达为向量的速度和加速

---

① 为便于说明，让我们把几何学看作物理学的一个分支。这是一个完全站得住脚的观点。说到“几何学”，我们指欧几里得几何学。这同样是为了便于说明。——20，②

② 我们正在考虑一个“齐次的”（homogeneous）欧几里得空间，其中没有原点或上面提到的参照系。——21，①

③ 设有两个给定的质量 α 和 β 占据两个位置，正规化使总质量等于1个单位并非难事，即 $\beta = 1 - \alpha$。——21，②

度，也允许“加法”运算。

3.4.3 在所有这些事例中，“自然的”运算被赋予一个名称，这一名称使人们联想到一种数学运算——如上述“加法”，但是，我们必须小心避免误解。这个专有术语并非总意味着具有相同名称的两种运算是完全相同的——显然不是这种情况；它只表示，它们具有相似的踪迹，而且有望最终建立起它们之间的对应关系。这当然是通过为要研究的物理领域建立数学模型来完成的，在这一模型之内，这些数量是由数字定义的。这样一来，在模型中，数学运算描述同名称的“自然”运算。

回到我们的例子：“能量”和“质量”变成了数学中的数字，“自然”加法变成了普通的加法。“位置”和向量变成了三维数组[①]，分别称为坐标或分量。“质量”分别为 α 和 $1-\alpha$ 的两个位置 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 和 $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$。[②]“重心”这一“自然”概念变成了

$$\{\alpha x_1 + (1-\alpha)x'_1, \alpha x_2 + (1-\alpha)x'_2, \alpha x_3 + (1-\alpha)x'_3\}。^{③}$$

向量 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 和 $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ 的“自然”“加法”运算变成了

$$\{x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3\}。^{④}$$

关于“自然”运算和数学运算的讨论同样适用于自然关系和数学关系。物理学中各种各样的“更大”的概

---

① 我们正在考虑三维欧几里得空间。——21,③

② 我们用它们的三个数字坐标来描述它们。——21,④

③ 通常记为 $\alpha\{x_1, x_2, x_3\} + (1-\alpha)\{x'_1, x'_2, x'_3\}$。见 16.2.1 中的(16:A:c)。——21,⑤

④ 通常记为 $\{x_1, x_2, x_3\} + \{x'_1, x'_2, x'_3\}$。见 16.2.1 的开头。——21,⑥

念——更大的能量、更大的力、更热和更高的速度等——就是很好的例子。

这些“自然”关系是建立数学模型并将其与物理领域联系起来的最好基础。①②

3.4.4 这里，我们必须再做一些说明。假设某一物理领域的上述意义上的一个数学模型被发现了，而且其中的物理量已经与数字联系了起来。在这种情况下，(数学模型的)描述不一定非要通过惟一一种方式来使物理量与数字联系起来。也就是说，它可以指定一族这样的联系——其数学术语是映射，其中任何一个都可以被用于这一理论目的。从这类关系中的一个到另一个的过渡等于描述物理量的数字的一个变换。我们说，在这一理论中，问题中的物理量由适合这一变换系统的数字来描述。这类变换系统的数学名字是群。③ 22

这类情况的例子很多。因此，距离这一几何概念是一个数，可以被(正的)因子乘。④ 物理学中的质量也是这

① 并不总是这样。温度是一个很好的反例。“更大”这一自然关系不足以建立今天的数学模型，即绝对温度计量。实际应用的是一个不同的方法。见3.2.1。——21，⑦

② 我们不想给人一个错误的印象，好像我们要在这里详细描述物理学理论的数学模型的建立。应该牢记的是，这一过程有着很多出人预料的发展阶段，十分多变。例如，一个重要的阶段是清理概念：即把表面看来是一个物理实体的东西分解为若干数学概念。因此，力和能的“分离”、热量和温度的分离在各自领域中都是关键性的。

很难预料，在经济学理论中，有待做出的这类区别有多少。——21，⑧

③ 在28.1.1中，我们会再论及群。我们还在那里指出了一些参考文献。——22，①

④ 也就是说，在欧几里得几何中不存在固定一单位距离的东西。——22，②

样。物理学中的能量是一个适合任意线性变换的数，即加上任意一个常数和被一个(①的)因子乘。[1] 位置这一概念按定义适合非齐次正交线性变换。[2][3] 按定义，向量概念适合做同样类型的齐次变换。[4]

3.4.5 我们甚至能够设想，物理量是一个适合单调变换的数。当仅仅涉及"更大"这一自然关系时，情况就是这样。例如，关于温度，在只关注"温度更高"的概念时，情况就是这样[5]；这一点适用于测量矿物硬度的莫氏
23 硬度标；当这一概念建立在传统偏好概念之上时，它也适用于效用概念。在这些事例中，你也许会采取这样一种观点，即考虑到用数字描述的随意性，问题中的数量根本不是数字。然而，我们应该尽量避免这类定性陈述，而应该客观地说明数字描述由什么变换系统决定。变换系统全由单调变换组成的情况当然是极端情况，从这一极端到另一极端，存在着各种各样的变换系统：空间中非齐次或单

---

① 也就是说，不存在固定能量单位的东西。见上面的脚注②。距离有一个自然的零，即任何一个点到其自身的距离。——22，③

② 也就是说，$\{x_1, x_2, x_3\}$ 被替换为 $\{x_1^*, x_2^*, x_3^*\}$，而

$$x_1^* = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1,$$
$$x_2^* = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2,$$
$$x_3^* = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3。$$

其中 a_{ij} 和 b_i 是常数，矩阵 (a_{ij}) 是正交矩阵。——22，④

③ 当关注的是位置时，几何中不存在固定原点参照系的东西，而且，当关注的是向量时，也不存在固定参照系的东西。——22，⑤

④ 即，脚注④中 $b_i=0$。有时，一个更广的矩阵概念是允许的，即行列式不等于零的矩阵。我们不必在这里讨论这些矩阵。——22，⑥

⑤ 但是，没有定量地可重复的检温学方法。——22，⑦

调正交线性变换、一个数字变量的线性变换、这一变量被一个常数乘。[①] 最后，数字描述绝对严格的情况也会发生，在这种情况下，任何变换都是不允许的。[②]

3.4.6 给定一个物理量，由数字描述的、适合它的变换可能会随时间变化，即随事物的发展阶段而变化。温度最初是一个数，只允许单调变换。[③] 随着检温学的发展，尤其是一致理想气体检温(concordant ideal gas thermometry)的发展，变换被限定为线性变换，即失去的只是绝对零和绝对单位。后来，热力学的发展甚至固定了绝对零，以至热力学中的这一变换仅仅是用一个常数乘。这类例子还有很多。不过，我们不打算过于深入地讨论这个题目。

关于效用，似乎存在着类似性质。你可以采取这样一种态度：在这一领域中存在着的"自然"数据只有"更大"，即偏好这一关系。在这种情况下，效用是适合做单调变换的数。事实上，在经济学文献中，这是一个已经被广为接受的观点，并且非常漂亮地用无差异曲线来描述。

要缩小这种变换系统，就必须在效用领域内找到其他"自然"运算或关系。因此，帕累托[④]曾指出，对于效用差来说，一个相等关系就足够了。用我们的术语来说，这会

---

① 你也能够想像出一些其他中间情况，比这些更大但不包括所有单调变换的变换系统。各种各样的相对论就是这类例子。——23，①

② 通俗地说，在这种情况中，我们能够为物理量定义一个绝对的零和一个绝对的单位。在光速起规范作用的物理理论中，如麦克斯韦电动力学和狭义相对论，绝对速度(不是向量!)就是一例。——23，②

③ 人们仅仅知道"更热"——即"更大"这一自然关系——这一概念。我们已经在前面广泛讨论过这个题目。——23，③

④ 帕累托：*Manuel d'Economie Politique*，巴黎，1907，第264页。——23，④

把变换系统缩小为线性变换。① 然而，由于这一关系似乎
24 不是一个真正的“自然”关系——即一个能够通过模拟观察来解释的关系——帕累托的建议达不到这一目的。

3.5 数字效用的公理化

3.5.1 一种具体方法的失败不一定意味着没有实现同一目标的其他方法。我们的意思是，效用的域含有一个“自然”关系，这一关系把变换系统限制到了其他方法已做到的同一程度。这就是我们在 3.3.2 中描述的分别有给定的概率 α 和 $1-\alpha(0<\alpha<1)$ 的两个效用的组合。这一过程十分类似于我们在 3.4.3 中提到的重心的建立，所以使用相同的术语也许是有益的。因此，关于 u 和 v，我们有 $u>v$ 这一“自然”关系（读作：u 优于 v），且有 $\alpha u+(1-\alpha)v$ 这一自然运算$(0<\alpha<1)$（读作：u 和 v 的重心，u 和 v 的权重分别为 α 和 $1-\alpha$；或：u 和 v 的组合，u 和 v 的概率分别为 α 和 $1-\alpha$）。如果这些概念的存在和可模拟的可观察性得到承认，那么，我们的思路就清楚了：我们必须找出效用与数之间的一个对应，它把关于效用的关系 $u>v$ 和运算 $\alpha u+(1-\alpha)v$ 变成了关于数的同名概念。

这一对应为

$$u \rightarrow \rho = \mathrm{v}(u),$$

u 是效用，$\mathrm{v}(u)$ 是这一对应赋予它的一个数。我们要求：

---

① 这正是欧几里得对一条直线上的位置所做的事情。“偏好”的效用概念对应着那里的“位于右边”这一关系，而且，效用差的相等关系对应着几何上区间长度的相等。——23,⑤

(3:1:a)　$u > v$　意味着　$\mathrm{v}(u) > \mathrm{v}(v)$，

(3:1:b)　$\mathrm{v}[\alpha u + (1-\alpha)v] = \alpha\mathrm{v}(u) + (1-\alpha)\mathrm{v}(v)$。[①]

如果存在着如下两个对应：

(3:2:a)　$u \to \rho = \mathrm{v}(u)$，

(3:2:b)　$u \to \rho' = \mathrm{v}'(u)$。

那么，它们就在数之间建立了一个对应：

(3:3)　$\rho \leftrightarrows \rho'$，

我们也可以写成

(3:4)　$\rho' = \varphi(\rho)$。

由于(3:2:a)、(3:2:b)满足(3:1:a)、(3:1:b)，对应(3:3)，即(3:4)中的函数 $\varphi(\rho)$ 必定保留关系 $\rho > \sigma$[②]，而运算 $\alpha\rho + (1-\alpha)\sigma$ 未受影响(见第 24 页脚注①)。也就是说，

(3:5:a)　$\rho > \sigma$ 意味着 $\varphi(\rho) > \varphi(\sigma)$，　25

(3:5:b)　$\varphi[\alpha\rho + (1-\alpha)\sigma] = \alpha\varphi(\rho) + (1-\alpha)\varphi(\sigma)$。

因此，$\varphi(\rho)$ 必定是一个线性函数，即

(3:6)　$\rho' = \varphi(\rho) \equiv \omega_0\rho + \omega_1$，

其中 ω_0、ω_1 是常数，$\omega_0 > 0$。

如此，我们看到：如果效用的这一数字赋值存在[③]，那么，它适合线性变换。[④⑤] 也就是说，效用是适合线性变换

---

① 注意，每个式子的左边是效用的"自然"概念，右边是关于数的普通概念。——24，①

② 将其运用于数 ρ、σ！——24，②

③ 即满足(3:1:a)、(3:1:b)的对应(3:2:a)存在。——25，①

④ 即(3:6)的形式之一。——25，②

⑤ 请回忆 3.4.4 中给出的同样情形的物理学例子。(我们现在的讨论更为详细一些。)我们不是在固定一个绝对的零和一个绝对效用单位。——25，③

的数。

为了保证上述意义上的数字赋值是存在的，我们有必要假设效用关系 $u>v$ 和运算 $\alpha u+(1-\alpha)v$ 的一些性质。这些公理或公设的选择及其随后分析带来了一些有一定数学趣味的问题。接下来，我们将给读者一个大致的轮廓，详细讨论见附录。

3.5.2 公理的选择并不纯属有目的的工作。通常，我们期望达到某些特定目的——某个或某些定理能够从这些公理中推导出来，就此而言，这一问题是严格的和有目的的。但是，除此之外，总是存在着一些重要而本质上不那么严格的要求：公理不应该太多，它们的体系要尽可能简单和明确，而且每一个公理应该有一个符合直觉的含义，据此，其合理性直接得以判断。[①] 在我们现在面对的这种情况中，最后一个要求尤其重要：我们想把符合直觉的概念弄得容易进行数学处理，并尽可能弄明白需要什么假设。

在我们的问题中，目的是明确的：公设必须意味着对应(3:2:a)的存在，而这一对应有 3.5.1 描述的性质(3:1:a)和(3:1:b)。如上面指出的那样，更多的试探性分析和审美要求并不决定发现这一公理化处理的途

---

① 第一个和最后一个原则也许——至少在一定程度上——代表着反面影响：如果我们通过合并的办法尽可能减少公理的个数，我们有可能失去区别各种各样的直觉理由。因此，我们本来可以用更少个数的公理来表达 3.6.1 中的一组公理(3:B)，但这样会使 3.6.2 中的分析令人费解。

要做到恰当的平衡是一个实践问题，一定程度上也是审美判断问题。——25，④

径是惟一的。后面我们将建立一组基本上令人满意的公理。

3.6 公理及其解释

3.6.1 这些公理是 26

我们考虑一个由 $u, v, w, \cdots$ 组成的系统 U。[①] 在 U 中，对任意 $\alpha(0<\alpha<1)$，给定关系 $u>v$，和运算

$$\alpha u+(1-\alpha) v=w。$$

这些概念满足如下公理：

(3:A)　　$u>v$ 是 U 的一个**完备排序**。[②]

这意味着：当 $v>u$ 时，我们写 $u<v$。那么，

(3:A:a)　　对任意的 u, v，下列三个关系中只有一个成立：

$$u=v, \quad u>v, \quad u<v。$$

(3:A:b)　　$u>v, v>w$ 意味着 $u>w$。[③]

(3:B)　　**排序和组合**。[④]

(3:B:a)　　$u<v$ 意味着 $u<\alpha u+(1-\alpha) v$，

(3:B:b)　　$u>v$ 意味着 $u>\alpha u+(1-\alpha) v$，

(3:B:c)　　$u<w<v$ 意味着满足下述条件的 α 存在：

$$\alpha u+(1-\alpha) v>w。$$

---

① 这当然指由我们的公理描述的（抽象的）效用系统。关于公理化方法的一般本质，见 10.1.1 中的说明和参考文献。——26，①

② 关于这一概念的更系统的讨论，见 65.3.1。偏好系统的完备性的等价概念在 3.3.2 和 3.4.6 已经考虑过。——26，②

③ (3:A:a) 和 (3:A:b) 相当于 65.3.1 中的 (65:A:a) 和 (65:A:b)——26，③

④ 请注意，这里 α、β 和 γ 总是 $>0, <1$。——26，④

(3:C)　　组合代数。

(3:C:a)　　$\alpha u+(1-\alpha)v=(1-\alpha)v+\alpha u$,

(3:C:b)　　$\alpha[\beta u+(1-\beta)v]+(1-\alpha)v=\gamma u+(1-\gamma)v$。

其中 $\gamma=\alpha\beta$。

我们能够证明,这些公理意味着一个对应的存在,而这一对应具有 3.5.1 中描述的性质(3:1:a)和(3:1:b)。因此,3.5.1 的结论是充分成立的:系统 U——即按我们目前的解释,(抽象)效用系统——是一个适合线性变换的数字系统。

按照(3:A)—(3:C)的意思,(3:2:a)、(3:1:a)和(3:1:b)的构建纯属一个有点繁琐的数学任务,符合传统做法
27 且没有特殊困难(见附录)。

同样,我们也没有必要在这里对这些公理进行常见的逻辑讨论。①

不过,接下来我们要简单说说公理(3:A)—(3:C)中每一个的直觉含义——即其合理性。

3.6.2　关于我们的公理的分析:

(3:A:a*)　　这是个人偏好系统完备性的表述。在讨论效用或偏好时,如"无差异曲线分析方法"中,通常都做出这一假设。这些问题已经在 3.3.4 和 3.4.6 中考虑过。

(3:A:b*)　　这是偏好的"可递性",一个明显合理且被

① 第 10 节将较为详细地讨论一个与此类似的情况,那些公理描述的是对于我们的目标来说更为重要的问题。其中 10.2 将进行逻辑讨论。10.3 中一些一般性的说明适用于当前这种情况。——27,①

广为接受的性质。

(3:B:a*)　这是说:如果 v 优于 u,那么,即便(作为 u 的备择的)v 出现的概率是 $1-\alpha$,v 仍然是优先的。这是合理的,因为任何类型的补(或对立)已经被排除,见3.3.2的开头。

(3:B:b*)　这是(3:B:a*)的对偶,用"不优于"取代"优于"。

(3:B:c*)　这是说:如果 w 优于 u,且一个更优先的 v 被给定,那么,u 与以小概率 $1-\alpha$ 出现的 v 的组合并不影响 w 对它的优越性。也就是说:无论对 v 本身的欲望多么强烈,一个人都可以通过赋予它一个充分小的概率而使这一欲望变弱。这是明显合理的"连续性"假设。

(3:B:d*)　这是(3:B:c*)的对偶,用"不优于"取代了"优于"。

(3:C:a*)　这是说,说 u、v 的一个组合与说 v、u 的一个组合是一回事,即在一个组合的命名中,其成分 u、v 如何排序无所谓。尤其这里 u、v 是互为备择的事件,这一点更具合理性。见(3:B:a*)。

(3:C:b*)　这是说,无所谓两个成分的一个组合是通过两个相继的步骤——首先,概率 α、$1-\alpha$,然后,概率 β、$1-\beta$——获得的,还是通过一个运算——概率 γ、$1-\gamma$、$\gamma=\alpha\beta$ ①——来获得的。这一说法同样适用于(3:C:a*)。然而,这一假

---

① 这当然是关于 u、v 的两次相继混合的正确算术运算。——27,②

设可能有更深刻的含义。我们将在 3.7.1 提到这一点。

3.7 关于公理的一般说明

28 **3.7.1** 至此，我们最好停下来重新思考这一情形。我们已经证明得太多了吗？我们已经能够从(3:A)—(3:C)导出效用的数字特征，它满足 3.5.1 中的(3:1:a)、(3:1:b)和(3:2:a)，而且，(3:1:b)指出，效用的数值像数学期望那样(与概率)结合！数学期望的概念常常受到怀疑，而且其合理性依赖于有关“期望”的本质的一些假设。[①] 我们未曾祈求于这一问题吗？我们的公理没有转弯抹角地引入导致数学期望的假设吗？

更具体一些说：参与“赌运气的行为”本身是否有(正的或负的)效用呢？而数学期望的运用消除了碰运气这类行为本身的效用。

我们的公理(3:A)—(3:C)是如何对付这种可能情况的呢？

我们能够看出，我们的公设(3:A)—(3:C)并不试图回避它。排除了“赌博的效用”(3:C:b)(见 3.6.2 中的论述)的情况看似合情合理，除非使用的是一个更为微妙的心理系统，而不是一个用于经济目的的心理系统。数字效用——数量公式等于数学期望的运用——能

---

① 见门格尔(Karl Menger)：Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre, *Zertschrift für Nationalökonomie*，第 5 卷(1934)，第 495 页和丁特纳(Gerhard Tintner)：“对非静态选择理论的一个贡献”，《经济学季刊》，第 LVI 卷(1942)，第 274 页。——28，①

够在(3:A)—(3:C)的基础上建立起来。这一事实似乎表明:实际上,我们把数字效用定义成了这样的东西,为了它,数学期望的计算是合理的。[1] 由于(3:A)—(3:C)保证必要的结构得到保留,在这个层面上,"打赌"的效用之类的概念无法不无矛盾地表达出来。[2]

3.7.2 正如我们在3.6.1中指出的那样,我们的公理的基础是效用关系 $u>v$ 和运算 $\alpha u+(1-\alpha)v$。值得注意的是,在人们看来,后者比前者更是直接给定的:如果一个人能够想像出可供选择的两种情况,其效用分别为 u 和 v,那么,他也就能够想像出两者分别以概率 α 和 $1-\alpha$ 出现。这几乎是毫无疑问的。相反,一个人却可能怀疑关于 $u>v$ 的公理(3:A:a),即这一排序的完备性。

让我们对这一点稍作思考。我们已经认识到,有可能受到怀疑的是,在分别具有效用 u 和 v 的两个选择机 29
会之中,一个人是否总能够决定他倾向于其中的哪一个。[3] 但是,无论这一疑问的价值是什么,我们都必须假设(个人)偏好系统的完备性。甚至,为了"无差异曲线方法"[见3.6.2中关于(3:A:a)的说明],我们也必须这么做。但是,如果我们假设了 $u>v$ 的这一性质[4],那么,

---

① 因此,贝奴里(Daniel Bernoulli)的一个著名建议是,用"道德期望"(而不使用数学期望)来解决所谓"圣彼得堡(St. Pertersburg)悖论",意思是把效用数字地定义为一个人的货币财富的对数。——28,②

② 这似乎是一个自相矛盾的断言。但是,任何人要想把如此难以表述的概念公理化,都会同意这一说法。——28,③

③ 或者,他是否能够断定他对两者的渴望程度完全相同。——29,①

④ 即完备性公设(3:A:a)。——29,②

较少受到怀疑的 $\alpha u+(1-\alpha)v$①的应用也给出数字效用！②

如果不做出一般可比性假设③，基于 $\alpha u+(1-\alpha)v$ 和 $u>v$，一个数学理论仍然是可能的。④ 这导致可以被描述为多维效用向量的概念。这是一个更为复杂和不能令人满意的结构。这里，我们不系统研究它。

3.7.3 这一简要说明没有涉及这个题目的所有方面，但是，我们希望我们已经说出了基本要点。为了避免误解，我们给出如下进一步的说明。

（1）我们重申，我们只考虑由一个人体会到的效用。这些考虑并不意味着任何与不同人的效用之间的可比性有关的事情。

（2）不可否认，对使用数学期望（见第 28 页脚注①）的这一方法的分析远非最终定论。我们在 3.7.1 中的说明中保持了这一方向，应该对这方面做更多讨论。其中涉

---

① 即公设(3:B)和(3:C)和(3:A:b)一起。——29，③

② 这里，读者会回想起这样一种观点，根据这一观点，效用的非数字（"无差异曲线"）描述优于任何数字效用，原因是它需要的假设更简单和更少。如果数字描述是建立在帕累托的效用差相等关系（见 3.4.6 末尾）之上的，那么，这一反对意见也许是合理的。这一关系的确是一个更强和更复杂的假设，这一假设是对效用的一般可比性（偏好的完备性）假设的补充。

不过，我们却使用了运算 $\alpha u+(1-\alpha)v$，而且，我们希望读者与我们一样认为，它是一个比偏好的完备性假设更安全的假设。

因此，我们认为，我们的方法不同于帕累托，不需要人为的假设，又不失简捷。——29，④

③ 这等于把(3:A:a)弱化为(3:A:a')，其中用"至多一个"取代"一个且仅有一个"。条件(3:A:a')、(3:A:b)对应着(65:B:a)、(65:B:b)。——29，⑤

④ 在这种情况下，公设(3:B)、(3:C)中的一些需要修改。——29，⑥

及到很多有意思的问题，不过，这些问题超出了本书的范围。对于我们的目的来说，只需看到的是，我们在3.6.1中给出的有关 $u>v$ 和运算 $\alpha u+(1-\alpha)v$ 的简单而合理的公理(3:A)—(3:C)是成立的，这使得数字效用适合我们讨论过的线性变换。

3.8 边际效用概念的作用

3.8.1 上面的分析表明，我们可以自由地使用数字效用的概念。下面的讨论将要说明，我们无法回避这样一 30
个假设，即所有经济主体都有关于所处情况物理特征的完全信息，并能够进行所有可能的统计和数学运算。这一假设的实质和意义已经在经济学的文献中受到广泛关注，而且这一问题远未得到详尽阐述。我们不打算考虑它。由于这一问题过于庞大和困难，因此，最好的办法是"分解困难"。也就是说，我们希望避开这一复杂性，那些出于对这一复杂性本身的兴趣而进行的研究应该与我们目前的讨论分开。

我们确实认为，我们对这一问题的研究做出了贡献，虽然我们的研究中未做任何讨论地假设了"完全信息"。我们将会看到，许多经济和社会现象常常被归因于个人的"不完全信息"的状态。这些现象也将出现在我们的理论之中，并能够借助"不完全信息"得到令人满意的解释。由于假设了"完全信息"，我们据此得出的结论是，这些现象与个人"不完全信息"无关。有些特别令人注目的这类例子将出现在33.1中的歧视(discrimination)和38.3中不完全剥夺(incomplete expoitation)或46.11和46.12中的

贡金(tribute)等分析之中。

基于以上分析,我们甚至能够斗胆向传统的不完全信息在经济和社会理论中的作用进行挑战。[1] 有些现象看似不得不归因于这一因素,其实与其没有关系。[2]

3.8.2 现在,让我们考虑一个孤立的个人,他有一定的物质特征和一定数量的可支配物品。鉴于以上说明,他的问题是确定这一情况下能够获得的最大效用。由于最大值是一个明确界定的数量,当这个人拥有的物品存量增加一单位时,效用的增加也是一个数量。当然,这正是一单位商品的边际效用这一传统概念。[3]

在"鲁滨孙"经济中,这些数量显然有着决定性意义。
31 如果他表现出通常所说的理性行为准则,上述边际效用显然对应于他为了得到额外一单位那种商品而愿意做出的最大努力。

然而,社会交换经济中的一个参与者在决定其行为时,这些数量的意义并不清楚。我们看到,在这种情况下,理性行为准则仍有待阐述,而且它们肯定不能由"鲁滨

---

① 我们将会看到,我们考虑的博弈规则会明确规定,特定参与者不应该拥有某些特定的信息。见6.3和6.4。14.8和15.3.2中的(15:B)中提到了一些不出现这类事情的博弈,并称之为"完美信息"博弈。我们应该认识到并利用这类"不完全信息"。[根据上述说明,我们宁愿将其称为不完美信息(imperfect information)。]但是,我们拒绝用复杂因素和智慧等概念模糊地定义的其他概念。——30,①

② 我们的理论将这些现象归于多重"稳定行为标准"的可能性。见4.6和4.7。——30,②

③ 更严格地说是所谓"间接地依赖的预期效用"(indirectly dependent expected utility)。——30,③

孙"经济的最大值条件来描述。因此,我们无法确定边际效用是否在这种情况下还有意义。[①]

关于这个题目,只有等到我们成功地建立了社会交换经济的理性行为理论——即上面说到的"策略博弈理论"——之后,才有可能得到实证性的陈述。我们将会看到,在这种情况下,边际效用的确也发挥着重要作用,不过,其发挥作用的方式要比人们通常认为的更为微妙。

4. 理论结构:解和行为标准

4.1　对于一位参与者来说解的最简单概念

4.1.1　至此,我们可以明确我们建立理论的方案了,这当然指一个大致的轮廓、主要技术概念和工具。

正如我们在前面指出的那样,我们希望找到一个数学的完备准则来定义社会交换经济参与者的"理性行为",并从中推导出这类行为的一般特征。虽然这类准则应该充分具有一般性——即在任何情况下都成立,但是,如果能够找到解的话,我们可以暂时满足于它们仅仅在某些特殊情况下成立。

首先,关于什么能够作为这一问题的解,我们必须有一个清楚的概念。也就是说,我们必须弄清楚一个解必须

---

① 所有这些将在我们的几个简单假设的范围内得到理解。如果这些假设被放松了,那么,各种进一步的困难就会接踵而来。——31,①

传递多大的信息量。关于其形式结构,我们应该期待些什么。只有这些问题清楚了,严格分析才有可能。

4.1.2 对于每一位参与者来说,解的直接概念是一组规则,这些规则告诉他们在可以想像到的各种情况下如何采取行动。也许有反对意见说,这一观点未必包括所有情况。由于我们要把"理性行为"理论化,因此,关于个人行为,似乎没有必要建议他采取不理性的社会行为。这意味着,我们可以合理地假设其他人的行为也是理性的——无论我们如何描述它。这样一个过程会导致一系列具有惟一性的情况,我们的理论则仅仅属于这些情况。

32 这一反对意见似乎因为下面两点理由而站不住脚:

首先,"博弈规则"(rules of the game)——即决定经济活动实际背景的物质规律可能是统计规律。经济参与者的行动,必须结合按已知概率发生的事件,才能决定结果,见第10页脚注②和⑥。2.1考虑到这种情况,那么,即使是在一个完全理性的社会中,行为准则也不是惟一的,要考虑到各种可能的情况——其中有些远不是最优的。①

其次,更为基本的一点是,理性行为准则必须照顾到有可能出现的其他人的非理性行为。换句话说:可以想像这样一种情况,我们已经为参与者找出了一组可以称为最优或理性的行为准则,如果其他人一致同意的话,这些准则的确是最优的。问题是,如果有些参与者不同意,结果

① 尽管由机会决定的可能结果多种多样,一个具有惟一性的最优行为还是能够想像出来的。这自然归于"数学期望"这一概念的使用。——32,①

会如何呢？如果其他准则有利于不赞成上述解的人，而不利于赞成者，那么，上述解就很难成立。这里，我们并不是在对这些事情进行实证性讨论，我们只是想弄清楚，在这类情况下，这个“解”或至少其动机必须被认为是不完美的或不完全的。无论我们如何表述行为准则和“理性行为”的反对意见，我们都必须附带限制每一种可能的“他人”行为。只有这样，一种令人满意的、详细的理论才能建立。但是，从上述建立行为理论标准的意义上说，如果要确立“理性行为”较其他类型行为的优越地位，其描述必须包括所有情况下的行为准则，包括“他人”采取非理性行为的情况。

4.1.3 至此，读者将看到我们的概念与日常生活中的博弈概念非常相似，这一相似性是基本的。对于经济和社会问题来说，在物理学中成功运用的大量几何数学模型也将出现在博弈论之中。此类模型是理论模型，精确、详细而又不太复杂。另外，它们还必须在要研究的现象的一些基本方面接近现实。详细一点说：定义必须准确和详尽，以使数学研究成为可能。结构不能过于复杂，以使数学研究不仅仅是形式，从而能够得到完备的数字结果。为了使
运算有意义，我们必须接近现实。而且，接近现实必须限于 33
一些基本方面，不然的话，上述要求就会相互冲突。[①]

显然，如果一个经济活动模型是根据这些准则建立起来的，那么，我们就有了对博弈的描述。在经济系统的核

---

① 例如，牛顿用少数几个“质点”来描述太阳系。这些质点相互吸引，并像星球那样运动。这是基本面上的相似，而行星的很多其他物质特征则被忽略了。——33，①

心——市场——的形式化描述中,这一点尤其重要。这一说法在任何情况下都是绝对正确的。

4.1.4 在4.1.2中,我们描述了我们希望一个解由什么组成——即"理性行为"特征的描述。这等于任何条件下能够想像出来的一组行为准则。对于社会经济和博弈来说,这一点是相同的。在这个意义上,全部结果是对具有巨大复杂性的组合的枚举。但是,我们已经接受了一个简化的效用概念,据此,个人追求的所有东西都可以由一个数字已知件(datum)来描述(见2.1.1和3.3)。因此,一个复杂组合序列提供了一个很简要的和有意义的总结:如果参与者的行为是"理性的",那么,他能够获得多大的数额。①② 这里,"能够获得的数额"当然被假定为一个最小值;如果其他人犯错误(采取非理性行为),他有可能获得更多。

应该理解的一点是,所有这些讨论都是为沿着前面所指出的思路,建立一个令人满意的理论体系。我们要说明的是衡量我们后面的分析成功与否所需要的东西。即便我们现在还不能满足这些要求,将其先提出来也符合常有的探索过程。的确,要建立一个令人满意的理论,这些预备性推理是必不可少的。③

---

① 效用,对于一个企业家来说是利润,对于一个玩家来说是得或失。——33,②

② 如果存在着明显的机会成分,我们当然指"数学期望"。——33,③

③ 熟悉物理学发展的人自然明白,这样一种试探性思考是多么重要。没有对要建立的理论应该满足的要求的"前理论"讨论,相对论和量子力学都不可能被发现。——33,④

4.2　推广到所有参与者

4.2.1　至此，我们仅仅考虑了，对于一位参与者来说，解应该是什么。现在，让我们想像所有参与者同时出现的情况。也就是说，让我们考虑一个社会经济，或固定个数（如 n 个）参与者的博弈。正如我们在前面讨论过的那样，一个解应该传递的完备信息是组合性的，我们将通过指出每个参与者的理性行为使他获得多大数额来进一步说明一个定量陈述如何包含这部分关键信息。考虑若 34
干个参与者“获得”的数额，如果除了指定这些数额[①]之外，解没有给出更多定量意义上的东西，那么，它就与众所周知的分配概念相重合了：它只不过指出了总收益将如何在参与者之间进行分配。[②]

我们强调，无论收益之和是零还是可变的，分配问题都必须得到解决。就其一般形式来说，在经济学文献中，这一问题既没有得到恰当的描述，也没有得到解决。

4.2.2　我们没有理由满足于这样一个解，即便假设它能够被找到：即一个单一的分配，它满足最优行为的合理条件。（当然，我们还没有阐述这些条件。详尽讨论见

---

① 当然还包括如何实现它们的过程，这些过程指前面描述过的组合意义上的过程。——34，①

② 在博弈中，如通常理解的那样，总的结果总是等于零。也就是说，一个参与者的得必定是另一个参与者的失。因此，存在着一个纯粹分配问题，这里的分配绝对不存在总效用或“社会产品”的增加。在所有经济问题中，后一问题也会产生，但分配问题仍然存在。后面，我们将拓宽博弈的概念，具体做法是放弃总结果为零这一条件。——34，②

下面相应段落。)我们考虑的社会结构极为简单:存在着一个绝对的均衡状态,其中每一位参与者的数量份额被严格决定。

然而,我们将会看到,一个具备所有这些必要性质的解一般来说是不存在的。解的概念必须被大大推广。你将会看到,这也是与社会组织的固有特征密切联系着的,这些组织特征,从“常识”的角度看,是众所周知的,但一直未能从恰当的角度对其进行观察(见 4.6 和 4.8.1)。

4.2.3 对问题的数学分析将会表明,的确存在一类不太重要的博弈,其中,一个解是能够定义并找到的:即一个单一的分配。在这种情况下,每一位参与者通过恰当的、理性的行为至少可以获得属于他的数额。事实上,如果其他参与者也采取理性行为,他恰好获得这一数额;如果他们不采取理性行为,他有可能获得更多的份额。

这些是两个人之间的收益之和为零的博弈。虽然这些博弈并不是主要经济过程中的典型博弈,它们却包含着所有博弈的一般特征,而且从中得到的结果是一般博弈理论的基础。我们将在第 2 章详细论述之。

4.3 作为分配集的解

4.3.1 如果上述两个约束都被放弃,那么,情况会发生实质性变化。

35 超越第二个约束的最简单的博弈是一个二人博弈,其中收益之和是变动的。这对应着一个具有两个参与

者的社会经济，并允许两者相互依存，并且总效用随其行为的改变而改变。[①] 事实上，这正是双边垄断的情况（见61.2—61.6）。在试图解决分配问题的努力中发现的、众所周知的“不确定带”表明，我们必须找到一个更宽泛的解的概念。这种情况将在上面提到过的段落中讨论。这里，我们仅将其用作困难程度指数，并借此过渡到其他情况，而这些情况更适合作为我们分析的起点。

4.3.2 放弃第一个约束的最简单博弈是一个三人博弈，其中收益之和等于零。与上述二人博弈相比，三人博弈不对应于任何基本经济问题。但是，不管怎样，它代表着人类关系中的一种可能性。其基本特征是，任何两位参与者联合起来对付第三位参与者，总能够占据优势。问题是，取得的优势如何在联合起来的两个人之间分配。任何这类分配方案都必须考虑到，其中任何两个人都可以联合。也就是说，在一个联盟的形成过程中，每位参与者都必须考虑这样一个事实，即他的盟友可能会背叛他，转而与另外一个人联合。

当然，博弈规则将规定一个联盟的收益如何在参与者之间分配。但是，22.1 中的详细讨论表明，这并不是最终判决。想像一个（三人或多人）博弈，其中两个参与者能够形成一个十分有利的联盟，同时，博弈规则还假设收益的较大部分归第一个参与者。另外，假设这一联盟的第二个参与者也能够与第三个参与者结盟。与前

① 你会回想起，我们使用的是可转移的效用，见2.1.1。——35，①

者相比，这个联盟从总体上说不那么有效，却能给他带来更大收益。在这种情况下，第一个人的一个合理做法是，把得自第一个联盟的收益的一部分转移给第二个人以拯救其联盟。换句话说，我们必须考虑到，在一定的联盟中，一个参与者愿意给予其盟友补偿。因此，一个联盟内部的收益分配不仅依赖于博弈规则，在有其他结盟机会的情况下，还依赖于上述准则。① 常识告诉我们，我们不能指望理论告诉我们哪一个联盟将会形成②，但理论能够告诉我们，在一个可能的联盟中，参与者将如何
36 分配得自联盟的好处，以避免其中的一个叛变并与另外一个参与者结成联盟。所有这些将在第5章中得到详细论述。

这里，我们只须指出上述定性分析明显合理的结果。这些结果将在上面提到过的段落中严格建立起来。在这种情况下，解的概念是由三个分配组成的一个系统。它们分别对应于上面提到的三种组合或联盟，并表达从联盟中得到的利益如何在盟友之间进行分配。

4.3.3 上述最后一个结果是一般情况的原型。我们将会看到，我们将在求解过程中得到一个具有一致性的理论，这些解不是单一分配，而是分配的系。

显然，在上述三人博弈中，解中任何单一分配本身都

---

① 这并不是说，博弈规则被破坏了，因为此类补偿性支付是理性思考下的自由行为。——35，②

② 显然，三个两人组合中的每一个都是可能的。在第21节给出的例子中，解内部对任何具体联盟的偏好都被对称性排除了。也就是说，对于三个参与者来说，该博弈是对称的。见33.1.1。——35，③

不像一个解。任何一个具体的联盟仅仅描述的是参与者计划其行动时的具体考虑。即便某一联盟最终形成了,收益在盟友之间的分配也将严重受到其他联盟的影响,这些联盟是每一个人都有的选择机会。因此,只有三种联盟及其分配合在一起才能形成一个合理的整体,决定其细节,并产生自身稳定性。事实上,这个整体才是真正有意义的,超出了组成它的单个分配。即使其中之一在实际中得到运用,即如果某一联盟实际形成了,其他联盟也"事实上"存在着(virtual existence):虽然它们没有取得物质的存在形式,但它们已经对现实存在的形成起到了根本作用。

在思考这个一般性的问题时,在考虑一个社会经济或等价地说一个有 n 个参与者的博弈时,我们将乐观地期望着同样的事情:一个解应该是一个分配系①,有某种整体上的平衡性和稳定性,其本质有待我们研究。我们强调,这里所说的稳定性,无论其具体表现形式是什么,将是整个系统的一个性质,而不是作为其一个组成部分的单个分配的一个性质。关于三人博弈的这些简要分析暂且到此为止。

4.3.4 我们的问题的解是一个分配系。描述一个分配系的严格准则当然是一个具有数学本质的准则。为了进行精确和详尽的讨论,我们必须提请读者随后研读这一理论的数学发展。其本身的严格定义将在 30.1.1 中给 37

---

① 如4.3.2 中描述的那样,其中也有一个联盟之内参与者之间的补偿。——36,①

出。这里,我们只给出一个初步的和定性的描述。我们希望,这将有助于理解作为定量分析基础的那些概念。另外,我们的分析在社会理论一般框架中的地位也将变得更加清晰。

4.4 不可递的“优越”或“占优”概念

4.4.1 让我们回到一个较为初步的解的概念,这是我们已知必须放弃的一个概念,即一个解是一个单一的分配。如果这类解存在,那么,它必须是一个分配,从某种意义上说,它优于所有其他分配。在解释分配之间的优越性时,我们必须考虑周围物质环境和社会结构。也就是说,我们应该以如下方式定义分配 x 优于(superior to)分配 y:假设社会,即所有参与者,必须考虑是否接受由分配 y 决定的所有分配问题的一个静态解决,与此同时,由分配 x 决定的解决作为备用选择也得到考虑,那么,x 足以排除 y 被接受的可能性。这就是说,有足够多的参与者出于自身利益而认为 x 优于 y,而且相信或能够使之相信他们能够从 x 获得利益。在 x 与 y 的这一比较中,参与者不应受任何第三种选择(分配)的影响。也就是说,我们认为优越关系是一个基本关系,它仅仅是分配 x 与分配 y 之间的关系。三个、多个或全部分配之间的比较是接下来必须考虑的理论问题,是耸立于优越这一基本概念之上的上层结构。

在上述定义中,是否能够使有利益的各方相信他们能够从选择 x 而放弃 y 中受益,取决于有关情况的物质事实——用博弈论的术语说,取决于博弈规则。

我们倾向于使用一个更专门的术语，而不使用“优越”(superior)这一具有多重意思的术语。当 x 与 y 之间的上述关系成立时①，那么，我们说，x 占优(dominate)y。②

如果我们认真地重新表述单一分配组成的解应该告诉我们些什么，那么，这一表述是：这一分配应该优于所有其他分配，而不被任何其他分配占优。

4.4.2　显然，上面描述的——或指出了的——占优概念从本质上说是一个排序，类似于偏好或任何定量分析 38
理论中的大小问题。一个单一分配解③的概念对应着排序中的第一元素的概念。④

如果问题中的排序，即我们的占优概念，具有可递性这一重要性质，即如果 x 优于 y 且 y 优于 z，那么，x 优于 z，寻找这样一个元素是显然的事情。在这种情况下，我们可以这么做：从任意一个 x 开始，然后，寻找一个 y，y 优于 x；如果这样的 y 存在，那么，选定其中一个，并接着寻找一个 z，z 优于 y；如果这样的 z 存在，那么，选定其中一个，并接着寻找一个 u，u 优于 z，如此等等。在大多数实际问题中，很有可能，这一过程只进行有限步，以某个 w 结束，w 不再被其他任何东西占优；也有可能，存在着一个无穷序列 x，

---

①　也就是说，当它在严格数学意义上成立时，见30.1.1。——37，①

②　为了顺口，我还是将这一关系译为 x 优于 y。——译者注

③　尽管我们已经说明了它是一个希望渺茫的方案，我们仍继续将其作为一个例子来讨论。这样做的理由是，首先说明在某些复杂因素不出现的情况下涉及到哪些东西，从而我们能够更好地研究这些复杂因素。当然，在这一阶段，我们真正感兴趣的是这些相当基本的复杂因素。——38，①

④　排序的数学理论十分简单，而且比任何纯粹口头说明更有助于我们深刻理解这些条件。必要的数学分析见65.3。——38，②

$y,z,u,...$ 但这些 $x,y,z,u,...$ 趋向于一个极限 w，而 w 不被其他任何东西占优。而且，鉴于上述可递性，最终的 w 优于所有先前得到的 $x,y,z,u,...$。

我们不想深入更具体的细节。这些细节能够且应该得到详尽讨论。对于读者来说，即将清楚的一点是，这一过程，通过序列 $x,y,z,u,...$ 对应着到达"最优"这一顶点的不断"进步"，这里，最优就是优于所有其他元素且不被占优的"第一"元素。

当可递性不成立时，所有这些会变得十分不同。在这种情况下，通过不断进步来达到"最优"的一切努力都是徒劳的。有可能发生这样的事情，即 y 优于 x，z 优于 y，但 x 优于 z。①

4.4.3 我们所依据的占优这一概念的确不具有可递性。在我们关于这一概念的试探性描述中，我们已经指出，x 优于 y 指：存在一群参与者，其中每一个人都认为他自己在 x 下的处境优于在 y 下的处境，而且他们相信他们能够作为一个群体——即联盟——强制实现他们的偏好。我们将在 30.2 中对此进行详细讨论。这一群参与者将被称为 x 优于 y 这一关系的"有效集"(effective set)。当 x 优于 y 且 y 优于 z 时，这两个占优关系的有效集有可能是分离的，从而无法就 z 和 x 之间的关系下结论。甚至有可能发生的情况是，存在一个与前两个有效集分离的第三个

---

① 在具有可递性的情况下，这是不可能的。因为 x 永远也不会优于它自身。事实上，如果 y 优于 x，z 优于 y，且 x 优于 z，那么，根据可递性，x 优于 x。——38，③

有效集，借助这个有效集，z 优于 x。

尤其在上述正式描述中，缺乏可递性有可能成为一个令人烦恼的复杂因素，而且我们甚至希望尽量回避与其有关的理论。然而，读者再浏览一下上面的论述就会注意到，它实际上只是包括在所有社会组织中的最典型现象的一个拐弯抹角的说法。各种分配，$x, y, z, \ldots$——即不同社会状态之间的占优关系，对应着这些关系能够相互造成的不稳定——即一个推翻另一个——的各种方式。各种各样的参与者群体，在各个这类关系中发挥着有效集的作用，有可能导致“循环的”占优，即 y 优于 x，z 优于 y，而 x 优于 z。这是有关这些现象的理论所必须面对的一个典型困难。 39

4.5　解的精确定义

4.5.1　接下来，我们的任务是把“最优”——即第一元素——的概念转换成一个在静态均衡状态中具有同样功能的概念。这样做的必要性在于，原先的概念已经站不住脚了。在4.3.2—4.3.3三人博弈的具体例子中，我们第一次看到了它的漏洞。现在，关于其缺陷产生的根源，我们有了更深刻的理解：它是我们的占优概念所固有的，具体说，它不具有可递性。

对于我们的问题来说，这类关系不足为奇。在很多领域中，这样的例子比比皆是。令人遗憾的是，它们还从未得到过真正的数学处理。我们说的是这样一些概念，本质上它们是偏好的比较、“优先”或排序一类概念，但却不具有可递性，如棋类锦标赛中选手的强弱，运动会中的“成绩

表”等。①

4.5.2 4.3.2—4.3.3 中关于三人博弈的讨论说明，一般来说，解是一个分配集，而不是一个单一的分配。也就是说，“第一元素”的概念必须由一组具有适当性质的元素（分配）来取代。4.3.2—4.3.3 中，作为三人博弈的解，我们引入了由三个分配组成的系。在第 32 节关于这一博弈的详尽讨论中（也可参见 33.1.1 中的解释，需要注意某些不同之处），这个系将借助 30.1.1 的假设被严格推导出来。这些假设十分类似于描述第一元素的那些假设。它们当然是一个元素（分配）集的必要条件，但如果这个集合是由惟一一个元素组成的，那么，我们的假设转向（整个分配系中）第一元素的特征。

我们还没有给出提供这些假设的详细动机，不过，我们接下来就要对其进行形式化描述，希望读者能够看出它们的表面合理性。定性分析方面的某些理由或一种可能
40 的解释将在接下来的段落中给出。

4.5.3 这些假设是：元素（分配）集合 S 是一个解，如果它具有如下性质：

(4:A:a) S 中的一个 x 不会被 S 中的 y 占优。

(4:A:b) 每个不属于 S 的 y 都被 S 中的某个 x 占优。

(4:A:a)和(4:A:b)也能够被表述为一个条件：

(4:A:c) S 中的元素恰好是这样一些元素，它们不被

---

① 某些这类问题已经通过引入机率和概率而得到了数学处理。不可否认，这一方法有一定的合理性，不过，我们怀疑，即使是在这些领域中，这是否有益于完全理解。对于我们关于社会组织的思考来说，这是很不够的。——39，①

S 中的元素占优。①

对此类练习有兴趣的读者现在就可以证明我们在前面的断言：对于一个包括惟一一个元素 x 的集合 S 来说，上述条件恰好说明 x 是第一元素。

4.5.4 乍一看，上述假设可能引起的部分担忧很有可能归因于其循环特征。在(4:A:c)中，这一点尤其明显，其中 S 的元素是由一个关系描述的，而这一关系又依赖于 S。重要的是，不要误解这种情况的含义。

由于我们的定义(4:A:a)和(4:A:b)，或(4:A:c)对于 S 来说是循环的，一个满足这些定义的 S 是否真的存在并不清楚；同样不清楚的是，如果存在的话，它是否具有惟一性。事实上，这些有待回答的问题是后面理论的主题。然而，有一点是清楚的，即这些定义毫不含糊地告诉我们一个给定的 S 是否是一个解。如果坚持要求定义的东西的存在性和惟一性，那么，可以说：我们并没有给 S 下一个定义，只不过定义了 S 的一个性质——我们还没有定义解，只是描述了所有可能的解。所有解的总体是否包含 S？包含一个 S 还是若干个 S？这些都是有待进一步研究的问题。②

4.6　解的"行为标准"解释

4.6.1　"单一分配"(single imputation)是经济理论中

① 因此，(4:A:c)是(4:A:a)和(4:A:b)合在一起的等价说法。虽然这实际上是一个简单想法的直接表达，没有经过数学训练的读者也许觉得涉及到了别的什么东西。——40，①

② 我们未必能说，(4:A:a)和(4:A:b)，或(4:A:c)的循环性不很清晰，并不意味着它们是套套逻辑。它们当然表达了对 S 的严格限制。——40，②

经常使用，并且为人们理解得较好的一个概念，但是，我们引入的分配集却是比较陌生的。因此，我们希望将其与我们在对社会现象的思考中已经很好地建立起来的概念联系起来。

41 事实上，我们正在考虑的分配集 S 似乎对应着有关社会组织的“行为标准”，接下来，让我们对此进行更仔细的研究。

假设一个社会经济的物质基础是给定的，或采取一种更宽泛的假设，一个社会的物质基础是给定的。① 根据各种传统和经验，人类以特定的方式调整自身以适应这一背景。不过，这并不等于一个严格的分配体系，而存在大量选择机会，它们很有可能都表达着某些一般原理，但它们在很多具体方面又有所不同。② 这一分配系统描述了“已经建立起来的社会秩序”或“公认的行为标准”。

显然，分配的任何随机归类都不能作为此类“行为标准”，它必须满足一定的条件，而这些条件将其描述为事物的一种可能顺序。这一可能的概念必须明确保证稳定性条件。读者将会看到，我们在上面描述的方法就充分体现了这种精神：分配 $x,y,z,\ldots$ 构成的集合 S 对应着我们现在所谓的“行为标准”，描述解 S 的条件(4:A:a)和(4:A:b)，或

---

① 在博弈中，正如我们在前面指出过的那样，这简单指博弈规则是给定的。不过，为明确起见，与社会经济的比较更为有用。因此，我们建议读者暂时忘却与博弈的相似性，完全从社会组织意义上进行思考。——41，①

② 也许存在着极端情况，用数学的语言来说是“退化”的特殊情况，其中结构是如此出奇的简单，以至一个严格的单一分配能够被投入运行。不过，把它们视为非典型情况而加以忽略似乎是合理的。——41，②

(4:A:c)则表达了上述意义上的稳定性。

4.6.2　在这种情况下，把(4:A:a)与(4:A:b)分离开尤其合理。不要忘记，x 优于 y 意味着，如果把分配 x 考虑进去，分配 y 被接受的可能性就被排除了。（这并不预示最终被接受的分配是什么。见 4.4.1 和 4.4.2。）因此，(4:A:a)表达了这样一个事实，即行为标准不会发生内部矛盾：属于 S 的分配 y，即符合“公认的行为标准”的 y 不可能被推翻，即不可能被另一个同类的分配 x 占优。另一方面，(4:A:b)表达了“行为标准”能够被用于使不符合“公认的行为标准”的程序不可信：不属于 S 的每一个分配 y 都能够被一个属于 S 的分配 x 推翻——即被占优。

要看到，在 4.5.3 中，我们并没有假设一个属于 S 的 y 永远不会被一个 x 占优。[1] 当然，如果这样的事情发生了，那么，根据(4:A:a)，x 就不得不在 S 之外。用社会组织学的术语来说：一个符合“公认的行为准则”的分配 y 有可能被另一个分配 x 推翻，但在这种情况下，x 肯定不符合“公认的行为准则”。[2] 根据我们在前面提出的条件，x 反 42 过来被第三个分配 z 占优，而 z 符合“公认的行为准则”。由于 y 和 z 都符合“公认的行为准则”，z 不能推翻 y，这进一步证明了“占优”的缺乏可递性。

因此，我们的解对应着具有内部稳定性的“行为标

---

① 我们能够证明，这样一个假设一般来说是无法得到满足的，即在所有真正有意义的情况中，不可能找到一个 S 满足这一假设和我们的其他条件。见 31.2.3 中的(31:M)。——41，③

② 暂时地，我们用“符合”（“公认的行为准则”）一词作为属于解 S 的同义语，用“推翻”作为占优的同义语。——42，①

准”：一旦它们被普遍接受，它们将否决所有其他事情，而且其中的任何一部分也都无法在公认的行为标准范围之内被否决。显然，现实社会组织中的事情就是这样的，而且它强调了4.5.3中条件的完全合理性。

4.6.3 我们在前面提到而未加讨论的一个主要反对意见是：4.5.3中的条件（4:A:a）且（4:A:b），或（4:A:c）意义上的一个解 S 的存在性和惟一性都是没有证据的。

关于解的存在性，当然不存在让步的余地。如果在任何具体情况中，我们关于一个解 S 的条件无法得到满足，那么，这必定意味着理论需要做根本性的修正。因此，对于所有具体情况来说[①]，解 S 的存在性的一般证明是必不可少的。我们后面的研究将会表明，这一证明尚未完成，不过，在至今已经考虑过的各种情况中，答案已经有了。

关于惟一性，情况则完全不同。通常所说的条件“循环性”很有可能意味着解一般不具有惟一性。的确，在大多数情况下，我们将看到解的多重性。[②] 我们曾经把解解释为稳定的“行为标准”。这里存在一个简单而不无道理的含义，也就是说，给定同样的物质背景，“已经建立起来的不同社会秩序”或“公认的不同行为标准”能够被建立起来，它们都具有上述内部稳定性。由于稳定性的这一概念被认为是“内在”的本质——即只有在行为标准被广为接受的条件下它才发挥作用，这些不同的标准有可能是相

① 用博弈论的术语说是：对于所有个数的参与者和各种可能的博弈规则。——42，②

② 一个有意思的例外是65.8。——42，③

互冲突的。

4.6.4 我们的方法应该与我们广为持有的如下观点进行比较:一种社会理论要成为可能,其基础只能是某种事先达成的社会目标原则。这些原则应包括总体上要达到的目标和个人之间分配的定量陈述。一旦它们被接受,剩下的问题只是一个简单的最大值问题。

请注意,令人满意的此类原则陈述目前还没有。常见的原则是,解的内在稳定性,或者解的取值是人们所渴望的等含含糊糊的理由。 43

关于后一种动机,没有多少可说的。我们的问题,不是在必然具有随意性的先验原则的集合之中确定应该发生什么,而是要研究力的均衡点在什么地方。

关于第一个动机,我们的目标是赋予那些观点一个精确和令人满意的形式,整体目标和个人份额同时受到关注。这使得我们有必要把整个内在稳定性问题当作一个问题来对待。在这一点上,一个具有一致性的理论不可能不考虑到经济利益、影响力和权力之间的相互作用。

4.7 博弈和社会组织

4.7 现在也许是把社会组织与博弈进行比较的恰当时机,这是我们在前面的段落中有意忽略的一个问题(见第 41 页脚注①)。4.5.3 意义上的解 S 与稳定"行为标准"之间的相似性在两个方向上都能够被用作有关这些概念的断言的进一步证据。至少,我们希望这一建议能够对读者有一定的吸引力。我们认为,策略博弈的数学理论方法肯定会受益于其概念与社会组织概念之间的对应关

系。另一方面，我们关于社会组织的每一个陈述几乎都与某些现存观点相抵触。而且，就事情的本质来说，大多数观点在社会理论范围之内至今无法得到证明或证伪。不过，我们的很多断言能够在策略博弈理论中的具体例子里得到证实，这对于我们来说很有帮助。

事实上，在物理学中，模型的使用是标准技术之一。这一双向过程使得模型非常有用。这一点是 4.1.3 中讨论它们时所没有强调的。

举例来说，基于相同的物质背景，有无可能出现多个稳定的“社会秩序”或“行为标准”？这仍然是一个很有争议的问题。用常规方法来解决这一问题希望不大，因为这一问题过于复杂，当然还有其他理由。但是，我们将给出三人或四人博弈的具体例子，其中一个博弈会有若干 4.5.3意义上的解。而且，有些例子将被视为特定简单经济问题的模型（见 62）。

4.8 总结

4.8.1 最后，让我们做几点正式的总结性说明。

44 我们从如下观察开始：我们的分析从单一分配开始，它们最初是从规则的较为详尽的组合集中定量提取。由此出发，我们分析了分配集 S，在一定条件下，集合 S 看似是解。由于解未必具有惟一性，一个具体问题的完全解决不是要找出一个解，而是要决定所有解的集合。因此，在任何具体问题中，我们要寻找的东西其实是分配集的一个集合。这也许有点不自然地复杂化了。另外，无法保证这一过程是否会因为后面的困难而变得必须继续下去。关

于这些疑问，我们只须说：第一，策略博弈理论的数学结构为我们的方法提供了形式上的合理性；第二，前面讨论的（对应着分配集合的）"行为标准"和同样物质背景下"行为标准"的多样性（对应着分配集合的集合），使得问题呈现出如此程度的复杂性。

有人可能指责我们把分配集合解释为"行为标准"。在 4.1.2 和 4.1.4 中，我们引入了一个更为基础的概念，作为一种"行为标准"的一种直接表述，这也许很使读者吃惊：这就是我们当初解的组合概念，对于每一个参与者来说，一个解是一个规则集合，告诉他在每一种可能的博弈情况下应该如何采取行动。（从这些规则出发，单一分配被提取为一个定量总结，见前面的分析。）然而，关于"行为标准"的这一简单观点仅仅在如下博弈中是站得住脚的，即联盟和联盟成员之间的补偿（见 4.3.2）不起作用。这是因为，上述规则没有考虑到这些可能性。联盟和补偿能够被忽略的博弈是存在的，如 4.2.3 中提到的二人零合博弈，以及更一般的，27.3 和 31.2.3 的（31:P）中讨论的"非本质"博弈。但是，在所有有意义的社会交换经济问题中，一般性典型博弈的研究不能没有这些工具。因此，同样的理由迫使我们在分析非单一分配的分配集合时，必须放弃"行为标准"这一狭隘概念。实际上，我们将把这些规则集合称为博弈的"策略"。

4.8.2　接下来，我们谈谈理论的静态本质和动态本质。再次强调，我们的理论完全是静态的。毫无疑问，一个动态理论会更复杂，从而更为可取。但是，其他科学分支中的大量证据表明，当静态方面尚未得到充分理解时，

试图建立动态理论是徒劳的。另一方面，读者可能反对我们在讨论中给出的某些动态观点。这一点尤其适用于关
45 于“占优”关系影响下各种分配的相互作用。我们认为，这是完全合理的。一个静态理论研究的是均衡。① 一个均衡状态的基本特征是，它没有改变的趋势，即它不会助长动态发展。当然，不使用一些基本性的动态概念，这类分析是难以进行的。换句话说，真正的动态分析研究的是远离均衡的精确移动，需要深入讨论这些动态现象。②③

4.8.3 最后，我们还要说明的一点是，关于社会现象的理论完全不同于现有数学物理学的模式。当然，这是对充满不确定性和模糊性的一个学科的猜测。

我们的静态理论具体指均衡状态——即 4.5.3 意义上的解，是分配集。从较简单意义上说，动态理论一般描述的是在当前时刻成立的一个“单一分配”的变化之类的事情。这表明，这部分理论的形式结构——静态与动态之间的关系——也许与经典物理学理论有着根本的不同。④

所有这些分析再次说明，在社会理论中，我们必定会遇到十分复杂的理论形式。区区静态分析就需要创立一

---

① 动态理论研究的是非均衡——尽管它们有时被称为动态均衡。——45，①

② 上面关于静态和动态的讨论只是顺便提一下。熟悉力学的读者会认识到，这是人们熟知的经典静力学和动力学的特点的重述。这里，我们指，这是涉及力和变化的科学过程的一个一般特征。——45，②

③ 静态均衡分析中的动态概念类似于经典力学中的“虚位移”。这里，读者也许会记起 4.3.3 中提到关于“实际起作用的存在”的说明。——45，③

④ 尤其不同于经典力学。上述脚注②中适用的类比在这里不成立。——45，④

套概念和形式体系，它们完全不同于数学物理学等使用过的东西。一个解是一个确定的数或数的综合这一传统观点，尽管在其他领域中取得了成功，对于我们的研究目的来说，却显得过于狭隘。对数学方法的强调将更多地转向组合数学和集合论，而且也背离了主导数学物理学的微分方程。

第2章　策略博弈的一般形式

5. 概　　论

5.1　从经济学到博弈的重点转移

46 **5.1**　第1章的讨论告诉我们，一种理性行为理论，即经济学的基础理论和主要社会机制的理论，要求对“策略博弈”进行详细研究。因此，从现在开始，我们必须把博弈论当作一门独立的学科来对待。在把博弈本身作为一个问题研究时，我们就必须对看问题的角度进行大的调整。在第1章里，我们的主要兴趣在于经济学。只是在我们已经确信，没有对博弈的基本理解，就不可能在经济学领域中取得进步之后，我们才开始探索作为这一学科的一部分的公式化描述。毕竟，第1章的主要内容是经济学的。然而，从第2章开始，我们将对博弈进行一般性的研究。因此，我们将不在乎我们的观点是否具有经济学意义，不然的话，对这一学科就显得不公正了。当然，大多数概念仍然是我们在经济学文献中已经熟悉了的（见下一节），不过，具体细节将常常与经济学相去甚远，而且细节常常会

主导我们的阐述并湮没我们的指导原则。

5.2　一般分类原则和程序

5.2.1　在第 1 章最后一节中，我们曾着重介绍过的"策略博弈"的某些方面，它们将不再出现在接下来的讨论的开始阶段。尤其是，我们将不再提及玩家之间的联盟以及他们之间的相互补偿。（关于这些概念，见第 1 章 4.3.2和 4.3.3。）我们将简明扼要地说明其理由，这将有助于我们全面理解这门学科的展开。

一个重要的博弈分类准则是：全体玩家（在博弈结束时）的总收益之和是否等于零。如果和等于零，那么，我们能够说，只存在玩家之间的相互支付，不存在物的生产或破坏。实际当中，所有的娱乐性博弈都属于这一类。不过，有经济意义的计划基本上都不属于这一类。在经济活动中，全部收益之和，即社会总产品，一般来说不等于零， 47
甚至不是一个常数。也就是说，收益总和取决于玩家——即社会经济参与者——的行为。我们在 4.2.1，尤其是第 34 页脚注②中，已经提到这一区别。我们称前一类博弈为零合博弈，称后一类博弈为非零和博弈。

我们将首先建立一个零和博弈理论，不过，你会发现，我们有可能借助零和博弈来分解无任何约束的一般博弈。严格地说：我们将证明，一般 n 人（可变和）博弈能够被简化为一个 $n+1$ 人零和博弈（见 56.2.2）。这样，n 人零和博弈理论将以二人零和博弈这一特殊情况为基础。（见 25.2。）因此，我们将从二人零和博弈理论出发。这一理论将在第 3 章中建立起来。

在二人零和博弈中，不存在玩家联盟和补偿。[①] 在这些博弈中，一些最基本的问题有着不同的本质。这些主要问题是：每一位玩家如何计划他的行动？即一个人如何建立一个严格的策略概念？在博弈的每一阶段，每位玩家能够获得什么样的信息？如果一位玩家被告知其他玩家的策略，这会有什么作用？如果一位玩家被告知这一博弈的整个理论，这又会有什么作用？

5.2.2 当然，在所有博弈中，即使联盟和补偿已经进入这些博弈，对于所有玩家来说，这些问题也都是基本的问题。但是，正如我们将在随后的讨论中证明的那样，对于二人零和博弈来说，惟有这些问题是重要的。这些问题也是经济学中已经有所认识的问题。不过，我们认为，在博弈论中，它们显得更为基本，并有别于那些综合性的问题，从而，我们能够对其进行严格的讨论。而且，正如我们希望的那样，我们能够将其彻底解决。在分析过程中，使用一些离经济学较远，严格地说属于人们经常玩的游戏作为例子并给出图示，会有很多技术上的便利之处。因此，我们的主要例子是国际象棋、“硬币配对”、扑克、桥牌等，而不是卡特尔、市场、寡头等市场结构。

顺便提醒一下，我们假设博弈结束时的交易总是纯货币交易。也就是说，我们假设每位玩家的惟一动机是货币

---

① 这一说法一个完全令人满意的“证明”是，一个完美的二人零和博弈理论的建立中不涉及玩家联盟和补偿。这将在第 3 章中完成。关键结果包括在第 17 节之中。然而，我们应该清楚，按照常识，在这里，“理智”和“联盟”能够不起作用：任何此类项目必定至少涉及两个玩家，他们也是二人博弈情况下的全部玩家。对于他们来说，收益之和等于零。也就是说，不存在余下的对手和其他可能的目标。——47，①

利润。我们已经在第 1 章的 2.1.1 中分析了这一假设效用概念上的含义。这是绝对必要的简化，尤其为了首先讨论“二人零和博弈”（见 5.2.1 中的讨论）。事实上，在这一理论的大多数地方，我们将坚持这一假设。与此不同的情况将被放在最后研究。（见第 12 章，尤其是第 66 节。） 48

5.2.3 现在，我们的首要任务是严格界定一个博弈由什么组成。在一个博弈的概念尚未用绝对精确的组合数学来描述的时候，我们不可能严格而详尽地回答 5.2.1 末提出的那些问题。如 5.2.1 所描述的那样，虽然我们目前的首要目标是二人零和博弈理论，但关于博弈由什么组成的严格描述不必局限于这种情况。因此，我们能够从一般 n 人博弈的描述开始。在给出这一描述时，我们将尽力考虑到博弈中可能出现的各种因素并一视同仁，除非它们明显具有无关紧要的特征。以这种方式，经过若干步骤，我们将得到一个相当复杂、详尽和具有数学精确性的体系。然后，你将看到，我们有可能用一个大为简单的系统来取代这个一般体系，而且它们之间是严格等价的。另外，对于我们的问题来说，使得这一简化成为可能的数学工具还有着直接的意义，这个工具正是一个严格的策略概念。

不难理解，为了简化问题的描述，避开过于复杂的东西，一些迂回的做法在所难免。我们要首先说明的是，所有可能的复杂因素都被考虑进去了，而且使用的数学工具确实保证涉及到的结构与简单的结构等价。

对于有任意多个玩家的各种博弈来说，这些都能够做到，也必须做到。但是，如上所述，在一般地实现了这一目标之后，我们的下一个目标是为二人零和博弈找到一个完

备解。在这一章中，我们讨论所有博弈。在下一章中，我们将只研究二人零和博弈。在我们研究透彻二人零和博弈并对一些重要的例子进行讨论之后，我们将扩展研究的范围，首先是 n 人零和博弈，然后是所有博弈。

6. 简化的博弈概念

6.1 术语解释

6.1 在用组合数学严格定义博弈的概念之前，我们必须首先澄清一些专门术语。博弈的讨论中要用到一些基本的术语，但这些术语在日常生活中的使用十分含糊。这些术语有时是这个意思，有时是另一个意思。而且，最
49 糟糕的是，有时候它们又好像是同义词。所以，我们必须引入确定的专门用法，从此以后固守这些用法。

首先，我们必须区别作为一个抽象概念的一种博弈(game)与玩一局(一盘或一次)这种博弈(a play)。一种博弈简单指描述这种博弈的规则的总和。在特定情形下或以一定方式玩一次某种博弈是一局(盘)。[①]

第二，关于动作(move)，我们也应做出相应的区别，

① 在大多数博弈中，日常说法中的玩游戏与游戏是一回事；在国际象棋、扑克和很多体育活动中也是这样。在桥牌中，一个 play 是"一盘"(rubber)；在网球中，一个 play 也是"一盘"(set)。不幸的是，这些游戏(博弈)中，一盘(或一局)的特定组成部分也被称为"博弈"。法语术语则不那么含糊："game" = "jeu"，"play" = "partie"。——49，①

它们是博弈的组成部分。一个动作是各种备择(alternative)中的一次选择机会,这一选择由玩家之一做出,或由某种装置按照一定的概率分布给出。这些都要严格遵守博弈规则。动作只不过是抽象的"场合",带有参与者的描述性细节,是博弈的一个组成部分。一次具体博弈,即一局博弈中,被选定的备择称为选择(choice)。因此,动作与选择之间的关系如同博弈与一局博弈之间的关系。博弈由一个动作序列组成,而一局博弈则由一个选择序列组成。①

最后,博弈规则不应该与玩家"策略"混为一谈。它们严格的定义将在后面给出,这里我们要强调的是,这一区别必须从一开始就是清楚的。每位玩家自由选择他的策略,即一般原则支配着他的选择。任意一个具体策略也许是好的或坏的——假如这些概念能够有严格解释的话(见 14.5 和 17.8—17.10),由玩家斟酌决定接受还是拒绝它。然而,博弈规则是绝对的命令。如果规则被违背了,那么,根据定义,总交易终止,此后的事情不再是这些规则所描述的那种博弈。在很多情况下,违背规则甚至从物理上说都是不可能的。②

6.2 博弈的要素

6.2.1 现在,让我们考虑一个博弈 Γ,其中有 n 个玩家,为了简练,分别记为 $1,2,\cdots,n$。一般情况下,一个博

---

① 从这个意义上说,我们可以谈论国际象棋的第一个动作(在棋类中称一招或一步),也可以谈论"E2—E4"这一选择。——49,②

② 例如,在国际象棋中,规则禁止一个玩家将他的王移到"棋盘"的某一位置。但是,一位玩家却能够将他的王移到对手能够将他"将死"的位置,这只不过是不明智,却不是规则禁止的。——49,③

弈由一个动作序列组成。我们假设这些动作的个数和排列从一开始就是给定的。我们将会看到,这些限制并无实际意义,而且我们能够轻易地将其去掉。现在,我们用 ν 记 Γ 中动作的个数,ν 是一个整数,$\nu=1,2,\cdots$。动作本身记为 $M_1,\cdots,M_\nu$,而且我们假设这是一个时间序列,即它们按照这一顺序发生。

50 动作 $M_\kappa,\kappa=1,\cdots,\nu$ 实际上由若干备择组成,动作 M_κ 是从这些备择中做出选择。这些备择的个数记为 α_κ,备择本身记为 $\mathscr{A}_\kappa(1),\cdots,\mathscr{A}_\kappa(\alpha_\kappa)$。

动作分两类:第一类动作是由某一位玩家做出选择,完全取决于他的自由决策,称个人动作。第二类动作取决于某种机械装置,它按照一定概率给出具有偶然性的结果①,称机会动作。因此,对于每一个个人动作,我们必须指明哪一位玩家的决策决定这个动作,即它是谁的动作。我们用 k_κ 记问题中的玩家(即他的号码),$k_\kappa=1,\cdots,n$。对于一个机会动作,我们令 $k_\kappa=0$。这里,各个备择 $\mathscr{A}_\kappa(1),\cdots,\mathscr{A}_\kappa(\alpha_\kappa)$ 的概率必须是给定的,分别记为 $p_\kappa(1),\cdots,p_\kappa(\alpha_\kappa)$。②

6.2.2 在动作 M_κ 中,选择是从 $\mathscr{A}_\kappa(1),\cdots,\mathscr{A}_\kappa(\alpha_\kappa)$

---

① 例如,从洗过的一副扑克牌中抽取一张,投掷一枚骰子等。在包含力量和技巧的某些博弈中,"策略"也能够发挥重要作用,如网球和足球等。在这些博弈中,玩家的动作在一定程度上说是其个人动作,即取决于他们的自由决策,但超过一定程度之后,它们就成了机会动作了,此时,概率成了其中的玩家的特征。——50,①

② 由于 $p_\kappa(1),\cdots,p_\kappa(\alpha_\kappa)$ 是概率,它们必然是不小于 0 的数字。又由于它们是不相交且穷尽的备择(对于一个固定的 κ),它们的和必定等于 1,即:

$$p_\kappa(\sigma)\geqq 0,\qquad \sum_{\sigma=1}^{\alpha_\kappa}=1 \qquad ——50,②$$

中选定一个，即从号码 $1,\cdots,\alpha_\kappa$ 中选择一个号码。我们记选定的号码为 σ_κ，那么，这一选择由一个数字 σ_κ 来描述，$\sigma_\kappa=1,\cdots,\alpha_\kappa$。而且，一个完成的动作由已经被指定的选择来描述，对应着此前的所有动作 $M_1,\cdots,M_\nu$，即由序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 描述。

现在，博弈 Γ 的规则必须规定，如果对于每一位玩家（$k=1,\cdots,n$）来说，一局博弈由一个给定的序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 来描述，那么，一局博弈的结果是什么呢？也就是说，当一局博弈结束时，每位玩家的收益是什么呢？记玩家 k 的收益为 J_k（如果玩家 k 收，那么，$J_k>0$；如果他支付，那么，$J_k<0$；如果他不收也不支，那么，$J_k=0$）。因此，每一个 J_k 必定是 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 的一个函数：

$$J_k=J(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu),k=1,\cdots,n$$

我们再次强调，博弈 Γ 的规则定义函数 $J_k=J(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)$，它只不过是一个函数①，即每一个 J_k 抽象地依赖于变量（$\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$）。但是，在任何时候，每一个 σ_κ 都是一个变量，其取值范围是 $1,\cdots,\alpha_\kappa$。为 σ_κ 指定具体数值，即选定一个具体的序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$，并不是博弈 Γ 的组成部分，正如我们在上面指出的那样，它是一局博弈的定义。

6.3　信息和预备关系

6.3.1　我们对博弈 Γ 的描述尚未完成，因为我们还 51
没有指定每一位玩家必须做出决策时所拥有的信息。

我们将以如下方式讨论这个问题：我们依次找出与动

---

① 函数概念的系统说明见 13.1。——50，③

作 $M_1,\cdots,M_\nu$ 相应的选择。

让我们考虑一个特定的动作 M_κ。如果这是一个机会动作,那么,我们只需说:选择是由机会决定的,任何人的意志或关于其他事情的知识都不能够影响它。但是,如果 M_κ 是一个个人动作,属于玩家 k_κ,那么,当玩家 k_κ 做出有关 M_κ 的决策——即他做出 σ_κ 选择时,他的信息状况就相当重要。

他能够获知的事情仅仅是与 M_κ 之前的动作——即 $M_1,\cdots,M_{\kappa-1}$——相应的选择。也就是说,他可以知道 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 的取值。不过,他也不一定知道那么多。Γ 的一个重要特征是,当轮到一位玩家选择 σ_κ 的值时,他至少需要多少有关 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 的信息。我们将很快在若干例子中证明这一约束条件的本质是什么。

玩家 k_κ 在 M_κ 时的信息状况的最简单描述是:一个给定的集合 Λ_κ,它由来自 $\lambda=1,\cdots,\kappa-1$ 中的一些数组成。假定玩家 k_κ 知道 σ_λ 的取值,λ 属于 Λ_κ,而且,当 λ 取其他值时,关于 σ_λ 的取值,他什么也不知道。

在这种情况下,当 λ 属于 Λ_κ 时,那么,我们说 λ 是 κ 的预备(preliminary)。这意味着,$\lambda=1,\cdots,\kappa-1$,即 $\lambda<\kappa$,但 $\lambda<\kappa$ 未必意味着 λ 属于 Λ_κ。换句话说,如果我们考虑的不是 λ,κ,而是与之相应的两个动作 M_λ 和 M_κ,那么,预备意味着先前(anteriority)①,但先前未必意味着预备。

6.3.2 尽管预备这一概念有一定的局限性,它却值得我们进一步研究。在它自身内部,在它与先前性(见上述脚注①)之间的关系中,它给出了各种可能的组合。在

① 从时间意义上说,$\lambda<\kappa$ 意味着 M_λ 发生在 M_κ 之前。——51,①

这些可能的组合出现的博弈中，它们具有特定的含义。下面，我们将借助一些极为特殊的例子来讨论它们。

6.4 预备性、可递性和信号传递

6.4.1 我们从考察这样一类博弈开始，其中预备性与先前性是一回事。也就是说，在这样的博弈中，做出（个人）动作 M_κ 的玩家 k_κ 知道先前所有的动作 $M_1, \cdots, M_{\kappa-1}$ 的选择结果。国际象棋就是这类具有"完美"(perfect)信息博弈的一个典型例子。一般认为，这类博弈具有理性特征。我们将在第15节，尤其是15.7中看到这一点如何得到精确解释。

国际象棋的另一个特点是，所有动作都是个人动作。52
这样，即便博弈中包含机会动作，保留上述第一个性质——即预备性与先前性之间的等价——也是可能的。巴加门[①]就是一个例子。[②] 你可能提出这样的疑问：机会动作的出现是否会破坏上述例子中提到的博弈的"理性特征"呢？

6.4.2 我们将会在15.7.1中看到，如果我们坚持"理性行为"的一个明显的合理解释，这样的事情将不会出现。这就是说，其中做出（个人）动作 M_κ 的玩家 k_κ 并不知道先前发生的所有事情。这类事情发生在一大类博弈

---

① backgammon，15子游戏，一方各有15枚棋子，掷骰子决定行棋格数。——译者注

② 在巴加门游戏中，机会动作是通过投掷骰子来决定每方可以有选择地前进的格数。个人动作是做出的决策，按照做出的决策划分分配给他的总格数。另外，他可以决定加倍风险，当对手加倍时，他可以选择接受或放弃。然而，在每一个动作过程中，对于每位玩家来说，先前所有动作的选择结果都是在棋盘上可见的。——52，①

之中。这些博弈通常既包含机会动作，又包含个人动作。一般认为，它们具有混合特征：其结果肯定依赖于机会，但同时也严重受到玩家的策略能力的影响。

扑克和桥牌就是很好的例子。这两类博弈表明，一旦我们把预备性和先前性区别开，预备性这一概念能够表现出多么奇妙的特征。下面，我们对此做较为详细的分析。

先前性，即动作的时间顺序，具有可递性。① 一般来说，预备性未必具有可递性。事实上，扑克和桥牌中都不是这样，而且出现这类事情的条件相当典型。

以扑克为例：设 M_μ 代表玩家 1 的发牌—— 一个机会动作；M_λ 是玩家 1 的第一次叫牌—— 一个个人动作；M_κ 是玩家 2（紧跟玩家 1 的叫牌之后）的第一次叫牌——玩家 2 的个人动作，那么，M_μ 是 M_λ 的预备且 M_λ 是 M_κ 的预备，但 M_μ 却不是 M_κ 的预备。② 因此，在这个例子中，预备关系不具有可递性。但是，这个预备关系中涉及两位玩家。然而，在任何博弈中，单就具体一位玩家来说，他的个人动作中的预备关系似乎不大可能缺乏可递性。预备关系的缺乏可递性要求这个玩家“忘记”动作 M_λ 和 M_κ 中的选择的结果与 M_μ 有联系。③ 令人难以理解的是，即便强

---

① 也就是说，如果 M_μ 先于 M_λ，且 M_λ 先于 M_κ，那么，M_μ 先于 M_κ。在第 1 章 4.4.2 和 4.6.2 中分析占优关系时，我们分析了一种特殊情况，其中可递性出现与否具有重要意义。——52，②

② 也就是说，玩家 1 第一次叫牌时知道他自己的牌；玩家 2 第一次叫牌时知道玩家 1 的第一次叫牌；但是，此时玩家 2 却不知道玩家 1 手里的牌。——52，③

③ 我们假设 M_μ 是 M_λ 的预备且 M_λ 是 M_κ 的预备，但 M_μ 却不是 M_κ 的预备。——52，④

制进行，他又如何能够"忘记"呢！然而，下面恰恰就是这样一个例子。 53

以桥牌为例：虽然桥牌是由四个人玩的，分别记为 A、B、C、D，但它应该被归类为二人博弈。事实上，A 和 C 形成一个组搭档，不仅仅是一个自愿的联盟。B 和 D 也是这样。A 与 B（或 D）合作而不与 C 合作应该属于"作弊"；同样，A 看 B 的牌或在玩游戏过程中跟牌不恰当也属于"作弊"。也就是说，这些做法违背了博弈规则。如果三个（或多个）人玩扑克，那么，其中两个（或多个）有一致利益的玩家合伙对付另一位玩家则是规则允许的。但是，在桥牌中，规则规定 A 必须与 C 合作（B 必须与 D 合作），禁止 A 与 B 合作。显然，我们可以把这种情形描述为，事实上，A 和 C 是一个玩家，B 和 D 是一个玩家，分别记为玩家 1 和玩家 2。换句话说，桥牌是一个二人博弈，只是这两个玩家 1 和 2 不亲自玩。玩家 1 派出 A 和 C 两个代表，玩家 2 则派出 B 和 D 两个代表。

现在，让我们考虑玩家 1 的两个代表：A 和 C。博弈规则限制他们之间的信息交换。例如，设 M_μ 代表 A 发牌——玩家 1 的一个机会动作；M_λ 是 A 出的第一张牌——一个个人动作；M_κ 是 C 在这一轮出的牌——玩家 1 的一个个人动作。如此，M_μ 是 M_λ 的预备且 M_λ 是 M_κ 的预备，但 M_μ 并不是 M_κ 的预备。[①] 因此，我们再次遇到了非可递性，但这次仅仅涉及一位玩家。值得注意的是，玩

① 也就是说，A 出第一张牌时知道他自己手里的牌；C 出牌时知道 A 出的牌；但此刻 C 不知道 A 手里的牌。——53，①

家1“性格分裂”成了A和C,从而在做出M_λ与M_κ之一时“忘记”了M_μ,这表明了“忘记”是多么必要。

6.4.3 上例表明,预备关系的非可递性对应着一个极为著名的实际策略要素:“信号传递”的可能性。如果在M_κ时,玩家对M_μ一无所知,但是,在M_κ时,观察M_λ的结果是可能的,而且(借助知道M_μ的结果)M_λ已经受到了M_μ的影响,那么,对于M_κ来说,M_λ其实是来自M_μ的一个信号——一个(间接)信息传递工具。视M_λ和M_κ是同一个玩家的动作还是两个不同的玩家的动作,出现了两种对立的情况。

在前一种情况下,如发生在桥牌中的情况那样,玩家($k_\lambda = k_\kappa$)发出“信号”,即“在其组织内部”散播信息是有利的。在桥牌中,这种愿望通过一个精心设计的“约定信号”体
54 系得以实现。[1] 这些是策略的组成部分,而不是博弈规则(见6.1),因此它们可以变化[2],桥牌这种游戏本身却保持不变。

在第二种情况下,如我们在扑克牌中看到的那样,玩家(指k_λ,注意这里$k_\lambda \neq k_\kappa$)总是试图阻止上述“信号传递”,即尽力不向对手(k_κ)传递信息。为此,在做出M_λ的选择时,玩家会采取不规则的和看似不合逻辑的行为,以使对手难以从(他看到的)M_λ的结果中获得(他对之没有

---

① 在桥牌中,按照博弈规则允许的行为来传递信号是完全公正的。例如,在游戏开始之前,(玩家1的两个代表,见6.4.2)A和C约定:“开叫”二阶有将定约“表示”其他花色较弱。但是,如果通过抓耳挠腮之类的做法来发出这样的信号则是不对的,属于“作弊”。——53,②

② 两个玩家甚至可以有根本不同的叫牌体系,即A和C有一套体系,而B和D有另一套体系。但是,在一个玩家的“组织内部”,如A和C,他们必须约定一套叫牌体系。——54,①

直接知识的）M_{μ} 的结果的线索。也就是说，这一过程试图把“信号”弄得不确定而含糊。我们将在 19.2.1 中看到，这正是扑克游戏中“诈叫”的作用。[①]

我们把这两个过程分别称为直接信号传递和反向信号传递。还应该指出的一点是，反向信号传递——即误导对手——几乎出现在所有博弈中，包括桥牌。这是因为，当有多个玩家时，预备关系很容易缺乏可递性。直接信号传递则比较少见。例如，扑克中就找不到它的蛛丝马迹。事实上，正如我们在前面指出过的那样，在只有一位玩家的情况下，直接信号传递意味着预备关系的非可递性——即它要求一位玩家十分“健忘”，像桥牌那样，这是通过一位玩家“性格分裂”为两个人来实现的。

无论如何，桥牌和扑克游戏是这两类缺乏可递性的两个典型例子：一个是直接信号传递的非可递性，另一个是反向信号传递的非可递性。

两类信号传递都导致的一个棘手问题是：实际博弈过程中两类信号传递的权衡问题，即在试图定义“好的”、“理性的”博弈玩法时的权衡。相对于不“复杂的”博弈来说，过多或过少信号传递必然会偏离“不复杂的”玩法。而且，只有在成本明确的情况下，即“多余”信号或信号“不足”的直接后果是损失的情况下，这才是可能的。因此，问题是调整“多余”信号使掌握信息的收益超过其直接造成的损失。你会觉得，这似乎涉及到了寻找一个最优状态之类

① 当持有一手弱牌时，“诈叫”并不是为了取得额外的好处。见上面提到的段落。——54，②

的事情，尽管这还不是一个清楚的定义。我们将会看到二人博弈理论如何处理这一问题，而且我们将在一个典型例子中对其进行详细讨论（见第 19 节简化的扑克游戏）。

最后，我们要看到，预备关系具有不可递性的重要例子都是含有机会动作的博弈。这是很奇妙的，因为这两类现象
55 之间根本没有明显的联系。①② 我们后面的分析的确证明，在这种情况下，机会动作出现与否极少影响策略的基本方面。

7. 完备的博弈概念

7.1 每个动作特征的可变性

7.1.1 我们在 6.2.1 中引入了动作 M_κ 的 α_κ 个备择 $\mathscr{A}_\kappa(1),\cdots,\mathscr{A}_\kappa(\alpha_\kappa)$。我们用 k_κ 描述这一动作是一个个人动作还是一个机会动作。在前一种情况下，它指明这一动作是哪位玩家的动作；在后一种情况下，我们要给定这些备择出现的概率 $p_\kappa(1),\cdots,p_\kappa(\alpha_\kappa)$。在 6.3.1 中，我们用集合 Λ_κ 描述预备关系的概念，Λ_κ 是由 λ 的取值（$\lambda = 1,\cdots,\kappa-1$）组成的集合，而 λ 是 κ 的预备。然而，我们尚未明确这些东西——$\alpha_\kappa, k_\kappa, \Lambda_\kappa$ 和 $\mathscr{A}_\kappa(\sigma), p_\kappa(\sigma), \sigma = 1,\cdots,\alpha_\kappa$——是惟一地依赖于 κ，还是还依赖于别的东西。

---

① 见 6.4.1 中预备性与先前性一致从而具有可递性时的相应问题。如我们在那里指出的那样，在这种情况下，机会动作出现与否无关紧要。——54，③

② “硬币配对”就是这样一个重要例子。我们将在第 18 节中讨论其他有关例子。——54，④

当然了，这里的“别的东西”只能是与先于 M_κ 的动作，即与数字 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1}$ 相对应的选择结果（见 6.2.2）。

下面，我们要对这一依赖关系进行更加详细的讨论。

首先，备择 $\mathscr{A}_\kappa(\sigma)$ 本身（有别于它们的个数 α_κ！）对 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1}$ 的依赖关系是无关紧要的。我们还可以假设，与动作 M_κ 相对应的选择不是从 $\mathscr{A}_\kappa(\sigma)$ 中做出选择，而是在它们的号码 σ 中间做出选择。最后，只有 M_κ 的 σ，即 σ_κ，出现在描述这一局博弈的结果表达式之中，即出现在函数 $J_k(\sigma_1, \cdots, \sigma_\kappa)$ 之中，$k = 1, \cdots, n$（见 6.2.2）。①

第二，当 M_κ 是一个机会动作，即当 $k_\kappa = 0$ 时，对 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1}$ 的各种依赖关系并不带来任何复杂性（见 6.2.1 末尾）。它们并不影响我们关于玩家行为的分析。尤其是，概率 $p_\kappa(\sigma)$ 不再出现在我们的分析之中，因为它们的发生仅仅与机会动作有关。（另一方面，Λ_κ 也永远不会出现在机会动作之中。）

第三，当 M_κ 是一个个人动作时②，我们必须分析 α_κ、k_κ 和 Λ_κ 对 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1}$ 的依赖关系。因此，这些可能性的

---

① 如果 $M_\kappa(\sigma)$ 是一个个人动作，那么，在 M_κ 时，玩家 k_κ 能够有的备择 $\mathscr{A}_\kappa(\sigma)$ 的形式和性质将向玩家 k_κ 传递有关这一时刻之前的 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1}$ 取值的信息，如果 $\mathscr{A}_\kappa(\sigma)$ 依赖于它们的话。但是，任何这类信息都应该被当作玩家 k_κ 在 M_κ 时的信息来指定。我们已经在 6.3.1 中讨论了关于这一信息问题的最简单的解决方案，而且我们将在 7.1.2 中完成对这一问题的讨论。当 $\mathscr{A}_\kappa(\sigma)$ 作为可能的信息来源的作用受到关注时，我们就必须进一步讨论 α_κ，k_κ 和 Λ_κ。这将放在稍后进行。——55，①

② 对于一个给定的 κ，这是否发生依赖于 k_κ，从而间接地依赖于 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1}$，因为它是由 $k_\kappa \neq 0$ 描述的（见 6.2.1 末尾）。——55，②

依赖关系会使我们的分析变得十分复杂。[①]

56 7.1.2 M_κ 时，玩家 k_κ 必须被告知 α_κ、k_κ 和 Λ_κ 的取值，因为这些是博弈规则的组成部分，他必须看到这些信息。只要它们依赖于 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$，那么，他就能够从中得出一些有关 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 的结论。但是，如果 λ 不在 Λ_κ 之中，关于 σ_λ，我们又假设他什么也不知道！很难看出，我们如何才能回避这一矛盾。

更具体一些说：在如下特殊情况下，根本不存在冲突：设 Λ_κ 独立于所有 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$，而且 α_κ 和 k_κ 仅仅依赖于 σ_λ，λ 在 Λ_κ 之中。这样，玩家 k_κ 肯定无法从 α_κ、k_κ 和 Λ_κ 中得到任何信息。也就是说，他所知道的仅仅是 σ_λ 的取值，λ 在 Λ_κ 之中。如果情况的确如此，我们说，我们有*特殊形式的依赖关系*。

但是，我们是否总有特殊形式的依赖关系呢？取一个极端的例子：如果 Λ_κ 总是空的，即玩家 k_κ 在 M_κ 时一无所知，而且 α_κ 又显然依赖于 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 中的一些，结果会怎样呢？

这是不允许的。我们必须要求，所有能够从 α_κ、k_κ 和 Λ_κ 得出的结论必须是明确的，而且从一开始就被指定为玩家 k_κ 在 M_κ 时能够得到的信息。然而，如果我们试图把 α_κ、k_κ 和 Λ_κ 所依赖于的 σ_λ 的指数 λ 都包括在 Λ_κ 之中，以

---

① 例如，在国际象棋中，在 M_κ 时，备择的个数 α_κ 依赖于玩家在此时面对的局面，即此前的博弈进程。在桥牌中，下一圈中出第一张牌的玩家，即 M_κ 时的 k_κ，是上一圈出最后一张牌的那位玩家，即他此时的选择机会也依赖于此前的博弈进程。在扑克和其他一些游戏中，在某一给定的时刻，一位玩家能够得到的信息量，即 M_κ 时的 Λ_κ，也会依赖于此前他和其他玩家做过的事情。——55，③

达到上述目的，那么，我们就错了。首先，在分析 Λ_κ 时①，为避免这一条件的迂回性，我们必须十分小心。不过，即使这种情况不出现，由于 Λ_κ 仅仅依赖于 κ，而不依赖于 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$，即每一位玩家在任一时刻能够得到的信息独立于此前的博弈进程，那么，上述做法仍有可能行不通。例如，假设 α_κ 依赖于某些 σ_λ 的特定组合，$\lambda=1,\cdots,\kappa_1$，而且博弈规则的确假设玩家 k_κ 在 M_κ 时应该知道这一组合的取值，但不允许他知道得更多（即不知道个别 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 的取值）。例如，他可能知道 $\sigma_\mu+\sigma_\lambda$ 的值，其中 μ 和 λ 都先于 $\kappa(\mu,\lambda<\kappa)$，但他不知道 σ_μ 和 σ_λ 各自的值。

你可以试着用各种巧妙的办法把上述情况还原为我们在前面提出的简单方案，其中玩家 k_κ 的信息状况由集合 Λ_κ 描述。② 但是，如果玩家 k_κ 在 M_κ 时的信息的各个组成部分本身来自不同玩家的个人动作或同一玩家在不同信息阶段的个人动作，那么，要解决它们之间的冲突则是完全不可能的。上例中，如果 $k_\mu\neq k_\lambda$，或 $k_\mu=k_\lambda$，但是，这个玩家在 M_μ 和 M_λ 的信息状况不同，那么，上述事情就会发生。③ 57

---

① 只有在所有 Λ_κ 就所有序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 做了总体上的考虑，Λ_κ 所依赖的 σ_λ 才能确定下来。每一个 Λ_κ 都应该包含 λ 吗？——56，①

② 在上例中，你可以试着用一个新的动作替换动作 M_μ，在这个新的动作中，被选定的不是 σ_μ，而是 $\sigma_\mu+\sigma_\lambda$。$M_\kappa$ 保持不变。那么，在 M_κ 时，玩家 k_κ 就只知道与新动作 M_μ 有关的选择结果。——56，②

③ 在第 56 页脚注②的例子中，这意味着：如果 $k_\mu\neq k_\lambda$，那么，不存在这样一个玩家，对于他来说，我们能够定义上例中那样的新动作 M_κ（其中 $\sigma_\mu+\sigma_\lambda$ 已经被选定，且这一动作是个人动作）。如果 $k_\mu=k_\lambda$，但是，从 M_μ 到 M_λ，信息状况随之变化，那么，我们就无法用一个新的 M_μ 并令人满意地描述信息状况。——57，①

7.2 一般描述

7.2.1 我们可以借助各种各样的技巧绕过这些困难，但是，最自然的做法还是允许它们存在，并且相应修改我们的定义。

办法之一是，不再用 Λ_κ 描述信息状况，而是以明确的方式描述玩家 k_κ 在其个人动作 M_κ 时的信息状况：列举这一动作之前的变量 σ_λ——即 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1}$——的函数，此刻，他知道这些函数的数值。这是一个函数系统，记为 Φ_κ。

因此，Φ_κ 是下述函数的集合：

$$h(\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1})$$

由于 Φ_κ 的元素描述的是对 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1}$ 的依赖关系，Φ_κ 本身是固定不变的，即它仅仅依赖于 κ。① α_κ 和 k_κ 有可能依赖于 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1}$，而且，由于它们的值是玩家 k_κ 在 M_κ 时知道的，函数

$$\alpha_\kappa = \alpha_\kappa(\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1}), k_\kappa = k_\kappa(\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1})$$

必定属于 Φ_κ。当然，对于 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1}$ 的一个特殊的集合来说，一旦 $k_\kappa = 0$，那么，动作 M_κ 就是一个机会动作（见上），Φ_κ 也就不再有用，不过，这并不重要。

显然，前面的 Λ_κ 描述方式只是现在的 Φ_κ 描述方式

---

① 然而，这一方案中包括这样一种可能情况，即 Φ_κ 所表达的信息状况依赖于 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1}$。例如，如果对于 σ_λ 的某些取值，Φ_κ 中的所有函数 $h(\sigma_1, \cdots, \sigma_{\kappa-1})$ 明显依赖于 σ_μ，而对于 σ_λ 的另外一些取值，它们又独立于 σ_μ，那么，上述事情时有发生。然而，Φ_κ 却是固定不变的。——57，②

的一个特殊情况。[①]

7.2.2 这里，读者也许会对我们突然转移话题而感到不满。事实上，我们的讨论是被现实中典型博弈的复杂性引向这个方向的（见第 55 页脚注③）。不过，用 Φ_κ 替换 Λ_κ 的必要性却源于我们希望保持（数学）形式上的一般性。引导我们迈出这一步的这些决定性的困难（见 7.1.2，尤其是其中的脚注）则实属推断。也就是说，它们最初并不是来自实际博弈例子的特征。（例如，国际象棋 58
和桥牌是能够借助 Λ_κ 来描述的。）

需要借助 Φ_κ 进行讨论的博弈是存在的。不过，对于其中的大多数来说，我们也可以借助各种各样的技巧将其转换为 Λ_κ 能够描述的情况。[②] 这个题目十分复杂，不值得为其花费更多篇幅。毫无疑问，也存在着一些经济模型，其中 Φ_κ 是必要的。[③]

然而，最重要的一点是：

在追求我们已确定的目标时，我们必须确认我们已经穷

---

① 如果 Φ_κ 恰好是由一些特定变量 σ_λ 的所有函数组成的——如 λ 属于一个给定的集合的那些 σ_λ 的函数，而且不是其他变量的函数，那么，Φ_κ 所描述的情况就回到了 Λ_κ 所描述的情况：Λ_κ 就是上述集合。但是，我们已经看到，一般来说，我们无法指望这样一个集合总是存在。——57，③

② 我们指桥牌，其中玩家可以垫掉一些牌张而不会暴露自己，而且允许他们在后面捡起来或明着使用他们垫掉过的牌。克里斯皮尔棋（Kreisspiel，一种双方分别在两个棋盘上下的国际象棋。——译者注）也是这类游戏。（其描述见 9.2.3，根据那里的描述，每位玩家知道对手先前的“可能的”选择，但不知道这些选择本身，而且这里的“可能情况”是所有先前选择的一个函数。）——58，①

③ 比如，假设一位参与者不知道他人先前行动的详细细节，但知道那些行动的特定统计结果。——58，②

尽了与玩家的各种决策有关的所有可能组合、他们的信息状况等。这些问题广泛存在于经济学文献之中。我们希望证明，它们是可以被解决的。不过，我们不希望因为不适当的简化而遭受指责，说我们没有考虑到一些基本的可能情况。

另外，我们将会看到，我们的讨论中所引入的形式上的东西并不会使分析过于复杂。也就是说，它们只是暂时地使形式化描述的最初阶段显得复杂。问题的最终形式并不受其影响（见 11.2）。

7.2.3 最后，我们要讨论一下前面做出的一个特殊假设（见 6.2.1 的开头）：动作的个数和排列从一开始就是给定的（固定不变）。我们将会看到，这个约束条件并不是根本性的。

让我们首先讨论动作的“排列”。每个动作的本质——即与之相对应的玩家 k_κ——的可变性已经被充分讨论过了（尤其见 7.2.1）。动作 M_κ（$\kappa=1,\cdots,\nu$）的排序就是其时间顺序，从而没有什么值得讨论的。

然后，我们讨论动作的个数。它是可变的，即依赖于博弈进程。[①] 在描述 ν 的这一可变性时，我们必须十分小心。

59 博弈进程由（选择）序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 来描述（见 6.2.2）。我们不可以简单地说，ν 是变量 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 的一个函数，因为 ν 的大小不是事先知道的，整个序列 $\sigma_1,\cdots,$

---

① 大多数博弈——国际象棋、巴加门、扑克和桥牌——都是这样。在桥牌中，这一变动性首先归因于“叫牌”阶段时间长度的可变性，其次归因于一个“胜局”（即一盘）中包含的定约个数的可变性。具有一个固定的 ν 的博弈例子较难找到：我们将会看到，在任何博弈中，我们能够人为地固定 ν，但是，如果一开始就把 ν 固定下来，游戏很容易变得单调乏味。——58，③

σ_ν 是无法事先看到的。[①] 正确的说法是：设想变量 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$ 是一个接一个地选定的。[②] 如果这一相继选择过程是无穷的，那么，博弈规则必须规定在某个地方 ν 终止这一过程。终止时的 ν 当然依赖于此前的所有选择。这也正是这一局博弈中动作的个数。

因此，必须有明确的停止规则，以使每一个能够想像得到的博弈将在某个时候停止。也就是说，绝对不可能把选择 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$（像上面脚注②描述的那样）安排得永远没有尽头。保证这一点的一个明显的办法是设计一个停止规则，根据这一规则，在某一固定的时刻 ν^* 之前，博弈就会停止。也就是说，虽然 ν 有可能依赖于 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$，但是，我们却可以肯定 $\nu \leqq \nu^*$，其中 ν^* 不依赖于 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$。如果情况是这样的，我们说停止规则以 ν^* 为界。我们将假设，我们讨论的博弈都有以（大小适当而固定的）数 ν^* 为界的停止规则。[③④]

---

① 也就是说，你不能说博弈的长短依赖于与全部动作有关的所有选择，这是因为，无论特定的动作是否发生，它都依赖于博弈的长短。这种说法显然是循环论证。——59，①

② σ_1 的变动范围是 $1, \cdots, \alpha_1$。σ_2 的变动范围是 $1, \cdots, \alpha_2$，而且有可能依赖于 σ_1：$\alpha_2 = \alpha_2(\sigma_1)$。$\sigma_3$ 的变动范围是 $1, \cdots, \alpha_3$，而且可能依赖于 σ_1 和 σ_2：$\alpha_3 = \alpha_3(\sigma_1, \sigma_2)$。如此等等。——59，②

③ 停止规则确实是博弈的一个基本组成部分。在大多数博弈中，找到 ν 的固定上限 ν^* 并不难。但有的时候，传统的博弈规则没有排除一局博弈——在例外情况下——有可能无限进行。在这些情况中，实际预防措施已经被结合到博弈规则之中了，目的是保证界限 ν^* 存在。然而，我们必须指出，这些预防措施并不总是绝对有效的——虽然在每一实例中目标是清楚的，甚至在例外性的无穷博弈存在的情况下，它们也是很少有实际意义的。不管怎样，至少从数学的角度看，对少数典型例子进行讨论还是有一些启发意义的。

下面，我们给出四个例子，并按照停止规则有效程度递减来排序。

埃卡泰牌戏：一次博弈是一个“胜局”，三“局”中胜两“局”为一个“胜局”（见第49页脚注①），赢五个“点”算胜一“局”，每次“发牌”给一位玩家或另一位玩家一“点”或二“点”。因此，一个“胜局”至多玩三“局”结束，一“局”至多由九个“发牌”组成。不难验证，一个“发牌”由13、14或18个动作组成。因此，$\nu^* = 3 \times 9 \times 18$。

扑克：两位玩家就可以交替“争叫”而没有尽头。因此，传统的做法是增加一个规则以事先限制允许“争叫”的次数。（竞叫的数额也是受限制的，以使这些个人动作的备择个数 α_κ 有限。）这当然保证了一个有限的 ν^*。

桥牌：这里，一次博弈是一个“胜局”，如果两方不能达成定约，一次博弈也可以永远进行下去。可以想像，有可能输掉这一“胜局”的一方应该以高得出格的争叫使得这一盘永远不能结束。实际中，没有人这样做，但是，博弈规则中毕竟没有明确禁止这么做。无论如何，从理论上说，某种停止规则应该被引入桥牌。

国际象棋：尤其在“残局”阶段，构造无穷选择序列使棋局永不结束（即“将死”）并不困难。最简单的情况是无限重复同一选择循环，不过，也存在非循环性重复选择。所有这些为有可能输棋的玩家有机会确保“和局”。出于这一理由，各种“和局规则”——即停止规则——被用于防止这种现象。

一个常见的“和局规则”是：任何选择（即动作）循环一旦重复三次，博弈以“和局”告终。这一规则排除了绝大多数无穷序列，但并非全部，从而是无效的。

另一种“和局规则”是：如果在40步内兵未曾移动且没有其他棋子被吃掉（这些是不可逆的招数），那么，棋局以“和局”告终。不难看出，这一规则是有效的，不过 ν^* 有可能很大。——59，③

④ 从纯数学角度看，我们可以提出如下问题：有效的停止规则指无法使序列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$ 成为一个无穷序列。也就是说，总是存在着一个有限的 ν，而且 ν 依赖于 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$。这是否能够保证存在一个有限且固定的 ν^*，以界定停止规则？即 $\nu \leq \nu^*$ 是否成立？

这是一个十分学究气的问题，因为实际中的博弈规则都试图直接建立一个 ν^*（见上面的脚注③）。不过，它却是一个十分有趣的数学问题。

答案是肯定的，即 ν^* 总是存在。例如，见哥尼（D. König）：*Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche*，Acta Litt. ac Scient. Univ. Szeged，Sect. Math. 第III/II卷（1927）第121—130页；尤其见附录第129—130页。——59，④

这样一来，我们就能够用界 ν^* 来彻底消除 ν 的变动性。 60

要做到这一点，只需简单地把博弈的过程扩展到总是有 ν^* 个动作 $M_1,\cdots,M_{\nu^*}$。到动作 M_ν 为止的所有事情都没有发生变化，而 M_ν 之后的所有动作都是“哑动作”(dummy move)。也就是说，对于序列 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\cdots$，如果我们考虑的是动作 $M_\kappa,\kappa=1,\cdots,\nu^*$，而 $\nu<\kappa$，那么，我们使 M_κ 成为一个机会动作，它只有一个备择①，即什么事情也不发生。

因此，在 6.2.1 的开头做出的假设——尤其是 ν 被事先给定的假设——就得到了验证。

8. 集合和分拆

8.1　对博弈进行集合论描述的必要性

8.1　我们已经对博弈进行了令人满意的一般性描述，接下来我们要做的事情是将其重新表述得具有公理化的精确性和严格性，为后面的数学讨论打下一个基础。然而，在此之前，尝试另一种形式描述还是值得的。这一描述严格等价于我们在前面的章节中给出的描述，但当我们进行一般形式的陈述时，它显得更统一、更简单且有着更简练易懂的符号。

为了完成这种描述，我们必须广泛使用集合论——更具体说是分拆——的符号体系。下面，我们对此进行必要

---

① 这当然意味着 $\alpha_\kappa=1,k_\kappa=0$ 且 $p_\kappa(1)=1$。——60,①

的解释。

8.2 集合及其性质图示

61 **8.2.1** 一个集合就是放在一起的一些东西,这些东西即该集合的元素的性质和个数绝对不受任何限制。组成一个集合的元素之间没有顺序和其他类型的关系。也就是说,如果有两个集合 A 和 B,A 中的元素也是 B 中的元素且 B 中的元素也是 A 中的元素,那么,这两个集合是完全等同的,即 $A=B$。α 是 A 中的一个元素这一关系也被说成 α 属于 A。[①]

我们感兴趣的主要是有限集,即有限个元素组成的集合。

对任意给定一些东西 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$,我们把它们的集合记为$(\alpha,\beta,\gamma,\cdots)$。引入一个不包含任何东西的集合即空集是有方便之处的。[②] 我们把空集记为$\ominus$。尤其是,我们能够构造一个只含有一个元素的集合,称一元集。注意,千万不要把一元集(α)与其惟一的元素 α 混淆了,它们不是相同的东西。[③]

---

① 集合论方面的数学文献浩如烟海。关于集合论方面的更多知识,有兴趣的读者可参见:弗兰克尔(A. Fränkel):*Einleitung in die Mengenlehre*, 3rd Edit. 柏林,1928,这是一本很好的入门书;奥斯多夫(F. Hausdorff):*Mengenlehre*, 2nd Edit. 莱比锡,1927,这是一本精确且内容处理极为出色的书。——61,①

② 如果两个集合 A 和 B 都不含有任何元素,那么,我们说,它们有相同的元素。因此,根据我们在上面说的,$A=B$。也就是说,只存在惟一一个空集。这里的推理也许有点怪异,却无可指责。——61,②

③ 在有些数学分支中,(α) 和 α 能够是等价的。这是偶尔做出的事情,但这样做是不健康的。一般来说,这样做也是行不通的。例如,设 α 是一个肯定不是一元集的某种东西,即一个由两个元素组成的集合或空集$\ominus$,那么,(α)与 α 就必须被区别开,因为(α)是一个一元集,而集合 α 则不是。——61,③

我们强调，任何东西都能够是一个集合的元素。当然，我们将把自己限于数学的东西。集合本身也完全能够被放在一起，从而形成集合的集合。后者常常被赋予其他名称，如集合的系或集合的聚合。但这并非必然。

8.2.2 有关集合的最主要概念和运算是：

(8:A:a)　　如果 A 的每一个元素也是 B 的元素，称 A 是 B 的一个子集，或 B 是 A 的一个超集，记为 $A\subseteq B$，或 $B\supseteq A$。如果上述关系成立且 B 含有不属于 A 的元素，称 A 是 B 的真子集，或 B 是 A 的真超集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。我们看到：如果 A 是 B 的一个子集且 B 是 A 的一个子集，那么，$A=B$。（这是 8.2.1 开头描述的原理的重新表述。）还有：A 是 B 的一个真子集，当且仅当 A 是 B 的一个子集且 $A=B$ 不成立。

(8:A:b)　　两个集合的和或并（集）是 A 的所有元 62
素与 B 的所有元素合在一起构成的集合，记为 $A\cup B$。两个以上的集合的并以类似方式形成。①

(8:A:c)　　两个集合 A 与 B 的积或交是 A 与 B 的

① 并、积、差的专门术语是约定俗成的东西。其基础是其与代数运算的相似之处。事实上，代数运算∪和∩也被称为布尔代数，有其自身的含义。例如，见塔斯基（A. Tarski）：《逻辑导论》，纽约，1941。也可见伯克霍夫（Garrett Birkhoff）：《格理论》，纽约，1940。本书更有利于理解现代抽象方法。我们将在第 6 章研究布尔代数。更多参考文献将在那里给出。——62，①

所有共同元素组成的集合，记为 $A\cap B$。两个以上集合的交以类似方式形成。

(8:A:d) 两个集合 A,B 的差（A 是被减数集，B 是减数集）是 A 中不属于 B 的所有元素组成的集合，记为 $A-B$。

(8:A:e) 当 B 是 A 的一个真子集时，我们也称 $A-B$是 B 在 A 中的补（或余）在有些情况下，集合 A 是默认的，我们将简单写 $-B$，且不做特殊说明地说 B 的补。

(8:A:f) 如果 A,B 没有共同的元素，即 $A\cap B=\ominus$，我们说 A 与 B 不相交。

(8:A:g) 称集合的一个系（集合）$\mathscr{A}$ 为一个两两不相交系，如果其中任意两个集合都是不相交的，即如果 A,B 属于 $\mathscr{A}$ 且 $A\neq B$，那么，$A\cap B=\ominus$。

8.2.3 这里，一些图示也许是有益的。

我们用图 1 中的点代表组成集合的元素，一条环形线圈住的点（元素）组成一个集合并在环形线上标出该集合的记号。如图 1 所示，以此方式，集合 A 与集合 C 不相交，而 A 与 B 相交。

63 借助这种方法，我们还能够表示集合的并、积和差。如图 2 所示，A 不是 B 的一个子集，且 B 不也是 A 的子集，因此 $A-B$ 和 $B-A$ 都不是一个补集。然而，在图 3 中，B 是 A 的一个子集，所以 $A-B$ 是 B 在 A 中的补集。

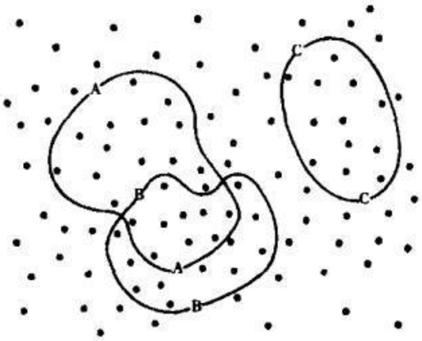


图 1

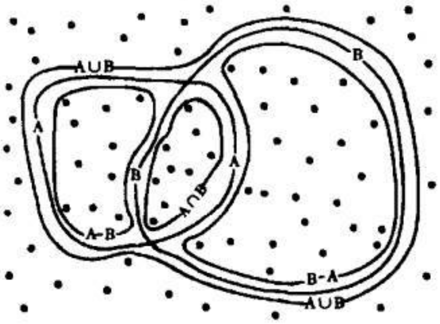


图 2

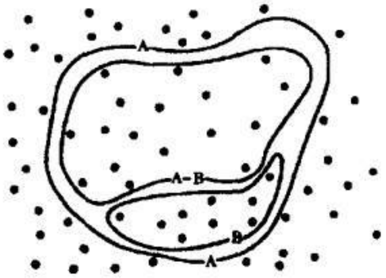


图 3

8.3 分拆及其性质图示

8.3.1. 设 Ω 是一个集合，而且 $\mathscr{A}$ 是一个给定的集合系。我们说 $\mathscr{A}$ 是 Ω 的一个分拆，如果它满足以下两个性质：

(8:B:a)　　$\mathscr{A}$ 中每一个元素 A 都是 Ω 的一个非空子集。

(8:B:b)　　$\mathscr{A}$ 是一个两两不相交的系。

这一概念也是很多文献的主题。[①]

对于两个分拆 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$，如果它们满足下述条件，我们说 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个子分拆：

(8:B:c)　　$\mathscr{A}$ 中的每一个元素是 $\mathscr{B}$ 中某一元素的子集。[②] 注意，如果 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个子分拆，且 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个子分拆，那么，$\mathscr{A}=\mathscr{B}$。[③]

接下来，我们定义：

(8:B:d)　　给定两个分拆 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$，我们构造所有非空的交集 $A\cap B$ 的系，其中 A 取遍 $\mathscr{A}$ 中的所有元素且 B 取遍 $\mathscr{B}$ 中所有元素。这显然也
64
是一个分拆，称 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的**叠加**。[④]

最后，我们还要就一个给定的集合 C 内的两个分拆

---

① 见上面引用过伯克霍夫的著作。我们的条件(8:B:a)和(8:B:b)并不是严格的传统条件。严格说：

关于(8:B:a)：有时，$\mathscr{A}$ 的元素不必是非空集。事实上，我们在 9.1.3 中就有一个例外（见第 69 页脚注④）。

关于(8:B:b)的说明：习惯上要求 $\mathscr{A}$ 的所有集合的并严格等于集合 Ω。对于我们的目的来说，忽略这一条件比较方便。——63，①

② 由于 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 都是集合，当关注 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 时，用子分拆关系来比较子集关系是合适的。你可以立即验证，如果 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个子集，那么，$\mathscr{A}$ 也是 $\mathscr{B}$ 的一个子分拆，但反过来说，一般是不正确的。——63，②

③ 证明：考虑 $\mathscr{A}$ 中的一个集合 A。它必定是 $\mathscr{B}$ 中某一集合 B 的一个子集，而且，反过来，B 是 $\mathscr{A}$ 中某一集合 A_1 的一个子集。所以，只要 A 不是空集，A 和 A_1 就有共同元素，即不是不相交。由于它们都属于分拆 $\mathscr{A}$，必有 $A=A_1$。故，A 是 B 的一个子集且 B 是 $A(A_1)$ 的一个子集。从而 $A=B$，且 A 属于 $\mathscr{B}$。——63，③

④ 不难证明，$\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的叠加既是 $\mathscr{A}$ 的一个子分拆，又是 $\mathscr{B}$ 的一个子分拆。而且同时是 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的子分拆的每一分拆 $\mathscr{C}$ 也正是它们的叠加。这也是这一名称的由来。见上面引用过的伯克霍夫的著作，第 I 章和第 II 章。——64，①

$\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 定义上述关系。

(8:B:e)　　$\mathscr{A}$ 是 C 内 $\mathscr{B}$ 的一个子分拆，如果属于 $\mathscr{A}$ 的每一个 C 的子集 A 也是属于 $\mathscr{B}$ 的某个 C 的子集 B 的子集。

(8:B:f)　　在 C 内，$\mathscr{A}$ 等于 $\mathscr{B}$，如果 C 的同一子集是 $\mathscr{A}$ 且 $\mathscr{B}$ 的子集。

显然，第 63 页的脚注③再次适用。还有，在 Ω 内，上述概念等同于最初的无限制的概念。

8.3.2　下面，我们再给出一些 8.2.3 中那样的图示。

我们从描述分拆开始。我们将不给出分拆中的元素（它们是集合）的名称，但它们的每一个用一个虚的环形线表示，见图 4。

接下来，描述两个分拆 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$：$\mathscr{A}$ 的元素用虚的环形线表示，$\mathscr{B}$ 的元素用打结的实线表示，见图 5。图 5 中， 65
$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个子分拆。图 6 中，$\mathscr{A}$ 不是 $\mathscr{B}$ 的子分拆，$\mathscr{B}$ 也不是 $\mathscr{A}$ 的子分拆。我们请读者给出这个图中 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的叠加。

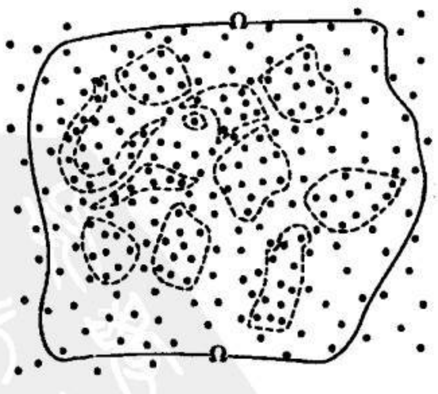


图 4

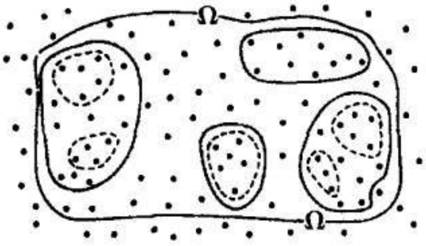


图 5

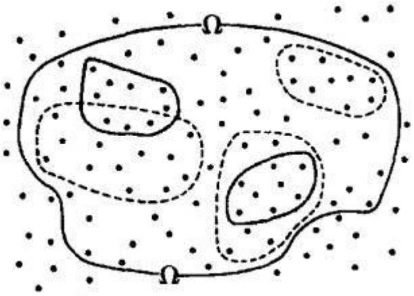


图 6

分拆的另一种较为简略的表示是，用一个点代表集合
66 Ω，分拆的每一个元素——Ω 的子集——用一条从这一点出发向上走的线表示。因此，图 5 中的分拆 $\mathscr{A}$ 可以用图 7 中更为简单的图形表示。这一方法不指出组成分拆的元素之内的元素，而且不像图 6 那样，它无法同时被用于描述 Ω 的若干分拆。然而，如果 Ω 的两个分拆有像图 5 中那样的关系，即 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个子分拆，那么，这一缺陷是能够弥补的。在这种情况下，我们就能够用位于顶端的一个点代表 Ω，$\mathscr{B}$ 中每个元素用从这一点出发向上走的一条线代表，$\mathscr{A}$ 中的每个元素用一条继续向上走的线代表，其起点是代表 $\mathscr{B}$ 的元素的线的终点，这表示 $\mathscr{A}$ 的这一元素是 $\mathscr{B}$ 的元素的一个子集。因此，我们能够在图 8 中描述图 5 中的两个分拆 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$。这一描述也没有图 5 中相应的描述那么有启迪作用。不过，其简明性使得它有可能比图 4 至图 6 更容易扩展。尤其是，我们能够用这一工具描述一个分拆序列 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_\mu$，其中每一个是前一个的子分拆。图 9 就是 $\mu = 5$ 的一个例子。

这类结构已经在数学中得到研究，被称为树。

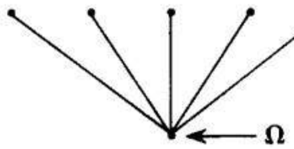


图 7

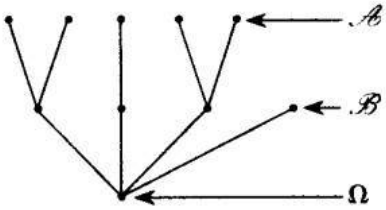


图 8

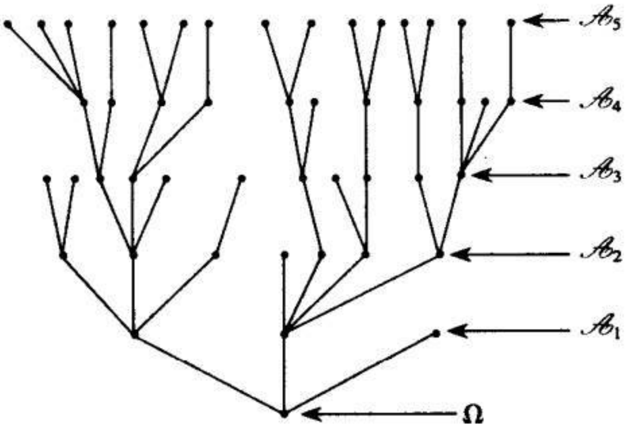


图 9

8.4 集合与分拆的逻辑学解释

8.4.1 我们在 8.2.1—8.3.2 中研究的概念在博弈论的讨论中是有用的，原因在于我们能够赋予它们的数理逻辑解释。

让我们从集合的解释开始。

如果 Ω 是任何东西的集合，那么，任何一个能够想像得到的性质都能够通过指定 Ω 中具有这一性质的元素的集合来描述这一性质，不属于这个集合的元素则没有这一性质。也就是说，如果两个性质在此意义上对应着同一集

合（Ω 的同一子集），那么，Ω 中同一些元素将同时具有这两个性质，从而它们在 Ω 之内是等价的，这里等价一词取其逻辑学中的意思。

（Ω 的元素的）性质不仅仅如此简单地对应着（Ω 的）子集，而且涉及性质的基本逻辑运算对应着我们在 8.2.2 讨论过的集合运算。

因此，两个性质的析取，即断言两者中至少有一个成立，明显对应着它们的集合的并，即运算 $A\cup B$。两个性质的合取，即断言两者同时成立，对应着它们的集合的交，即运算 $A\cap B$。最后，一个性质的否定，即与其对立的断言，对应着它的集合的补，即运算 $-A$。[①]

67 我们不像前面那样把 Ω 的子集与 Ω 中的性质联系起来，我们可以将其与有关 Ω 的一个元素的所有可能的信息体联系起来。关于 Ω 中的一个元素，没有这些信息体，这一元素就会被忽略。事实上，任何此类信息等于断言 Ω 的这一未知元素具有某种特定的性质。Ω 中具有这一性质的元素的集合等价地描述了这一性质。也就是说，给定的信息缩小了 Ω 的这一未知元素的可能范围。

尤其要看到，空集⊖对应着一个不可能出现的性质，即荒谬的信息。两个不相交的集合对应着两个不相容的性质，即两个相互排斥的信息体。

8.4.2 现在，让我们把注意力转向分拆。

用我们现在的术语重新考虑并重新表述 8.3.1 中的

---

① 关于集合论与形式逻辑之间的关系见前面引用过的伯克霍夫的著作，第 VIII 章。——66，①

定义(8:B:a)和(8:B:b)。我们看到:一个分拆是——有关 Ω 的一个未知元素的—— 一个两两相互排斥的信息系,其中的每一个都不是谬论。换句话说:一个分拆是一项预先声明,它表明,在以后的讨论中,有关 Ω 的某一元素有多少信息将会被给出。也就是说,以后关于这一元素的可能范围将在多大程度上被缩小。但是,实际信息并不由分拆给出,那样等于选择这一分拆的一个元素,因为这样一个元素是 Ω 的一个子集,即实际信息。

因此,我们能够说,Ω 中的一个分拆是一个*信息模式*。至于 Ω 的子集,我们在 8.4.1 中看到,它们对应着一定的信息。为了避免与分拆中使用的这个词混淆,对于 Ω 的子集,我们使用*实际信息*一词。

然后,让我们考虑 8.3.1 中的定义(8:B:c),并将其与我们现在的术语联系起来。这表示,对于 Ω 中的两个分拆 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$,$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个子分拆:这等于断定,$\mathscr{A}$ 所指信息包含 $\mathscr{B}$ 所指全部信息(且可能更多);也就是说,信息模式 $\mathscr{A}$ 包含信息模式 $\mathscr{B}$。

这些说明使得 8.3.2 中图 4 至图 9 的意义更为明确了。尤其是,图 9 的树形描述了一个不断增加的信息模式序列。

9. 博弈的集合论描述

9.1 描述一个博弈的分拆

9.1.1 如我们在前面说明过的那样,我们可以假设

动作的个数是固定的。这个数记为 ν，且动作本身记为 $M_1, \cdots, M_\nu$。

考虑博弈 Γ 的所有可能的实际博弈，并以它们为元素建立集合 Ω。如果我们使用上一节中的描述，那么，所有
68 可能的实际博弈简单地说就是所有可能的序列 $\sigma_1, \cdots, \sigma_\nu$。[①] 只有有限个这样的序列[②]，因此 Ω 是一个有限集。

然而，我们还可以更直接地建立 Ω。例如，我们可以通过把每一局博弈描述为 $\nu+1$ 个相继出现的位置的序列，它们出现于博弈进程。[③] 当然，一般来说，一个给定的位置之后不会随意紧跟着一个位置，在某一给定时刻，可能的位置受到先前的位置的约束，其方式必须由博弈规则明确描述。[④] 由于我们关于博弈规则的描述是从建立 Ω 开始的，我们不想让 Ω 本身如此严重地依赖于这些规则的详细细节。所以，我们看到，没有理由反对把荒谬的位置序列[⑤]也包括在 Ω 之中。因此，即便令 Ω 包含任何 $\nu+1$ 个相继位置组成的序列，不加任何限制，也完全可以接受。

我们将在下面的描述中说明，真正可能的实际博弈是如何从这一浩如烟海的集合 Ω 中选择出来的。

---

① 尤其见 6.2.2。$\sigma_1, \cdots, \sigma_\nu$ 的取值范围是第 59 页脚注②中描述过的。——68,①

② 借助上面提到的脚注中的方法可直接验证这一点。——68,②

③ M_1 之前，M_1 与 M_2 之间，M_2 与 M_3 之间，…，$M_{\nu-1}$ 与 M_ν 之间，M_ν 之后。——68,③

④ 正如第 59 页脚注②中描述的那样，这与序列 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{\nu-1}$ 的发展类似。——68,④

⑤ 即最终将发现是详细阐述的博弈规则所不允许的位置。——68,⑤

9.1.2　给定 ν 和 Ω，我们进入博弈进程的较为复杂的细节。

考虑这一进程中的一个确定的时刻，如紧挨着动作 M_κ 之前的那一时刻。在这一时刻，如下一般规定必定由博弈规则给出：

首先必须描述的是，在多大程度上，作为动作 M_κ 的预备的事件[1]已经决定了博弈的进程。这些事件中的每一个具体序列把集合 Ω 缩小为一个子集 A_κ：这是来自 Ω 的这样一些实际博弈的集合，至 M_κ，它的进程是上述具体事件序列。用我们原来的术语说，正如 9.1.1 中指出的那样，Ω 是所有序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 的集合；那么，A_κ 则是这样一些序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 的集合，其前面 $\kappa-1$ 项已经被赋予了数值 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$（见上面脚注⑥）。不过，从我们目前更为广阔的视角来看，我们只需说，A_κ 必定是 Ω 的一个子集。

一个博弈进行到 M_κ 的各种可能进程必定由不同的集合 A_κ 来描述。任何两个这样的进程，如果它们是互不相同的，就会给出两个完全不相交的实际博弈集合。也就是说，不存在一个实际博弈能够立即从 M_κ 开始而其前面的进程可以是两者中的任何一个。这意味着任何两个不同的集合 A_κ 必定是互不相交的。

因此，至 M_κ，我们的博弈的所有能够想像到的博弈进程的结果由 Ω 的一族两两不相交的子集来描述。我们记这个族为 $\mathscr{A}_\kappa$。 69

---

① 即与先前动作 $M_1,\cdots,M_{\kappa-1}$ 联系着的选择，即 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 的取值。——68，⑥

包含在 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的所有 A_κ 的并集必定包含所有可能的实际博弈。但是,由于我们明确允许 Ω 的一个多余部分(见9.1.1)存在,这个并集未必等于 Ω。总之:

(9:A)　　$\mathscr{A}_\kappa$ 是 Ω 的一个分拆。

我们还能够说,分拆 $\mathscr{A}_\kappa$ 描述了一个人的信息模式,这个人知道至 M_κ 为止已经发生的一切①,一个监督博弈进程的裁判就是这样的例子。②

9.1.3　第二,我们必须知道 M_κ 的性质。这是由6.2.1中的 k_κ 表达的:如果这一动作是一个个人动作,那么,$k_\kappa=1,\cdots,n$;如果这个动作是一个机会,那么,$k_\kappa=0$。k_κ 也许依赖于至 M_κ 为止的博弈进程,即依赖于 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的信息。③ 这意味着,在 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的每一个集合 A_κ 之内,k_κ 必定是一个常数,但它会随着 A_κ 的改变而变化。

相应地,我们可以对每一个 $k,k=1,\cdots,n$ 建立一个集合 $B_\kappa(k)$,它包含所有的集合 $A_\kappa,k_\kappa=k$,不同的 $B_\kappa(k)$ 是不相交的。因此,$B_\kappa(k),k=1,\cdots,n$,形成 Ω 的一个不相交子集族。我们记这个族为 $\mathscr{B}_\kappa$。

(9:B)　　$\mathscr{B}_\kappa$ 也是 Ω 中的一个分拆。由于 $\mathscr{A}_\kappa$ 的每一个 A_κ 是 $\mathscr{B}_\kappa$ 中的某个 $B_\kappa(k)$ 的子集,$\mathscr{A}_\kappa$ 是 $\mathscr{B}_\kappa$ 的一个子分拆。

---

① 即与动作 $M_1,\cdots,M_{\kappa-1}$ 联系着的所有选择结果。用我们早一些的术语说:$\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}$ 的取值。——69,①

② 引入这样一个人是必要的,原因在于,一般来说,没有一个玩家拥有 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的全部信息。——69,②

③ 用7.2.1中的符号,在上一脚注的意义上说:$k_\kappa=k_\kappa(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1})$。——69,③

具体枚举 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的 A_κ 的机会是不存在的，$\mathscr{B}_\kappa$ 却不同。$\mathscr{B}_\kappa$ 严格地由 $n+1$ 个集合 $B_\kappa(k)$ 组成，$k=0,1,\cdots,n$。按 $k=0,1,\cdots,n$，它们以一个固定的枚举方式出现。[①] 而且这一枚举是基本的，因为它取代了函数 k_κ（见上面的脚注③）。

9.1.4　第三，与动作 M_κ 联系着的选择发生的条件必须得到详细描述。

首先，假设 M_κ 是一个机会动作，即我们在集合 $B_\kappa(0)$ 之内，那么，有明显意义的量是：备择的个数 α_κ 及其出现的概率 $p_\kappa(1),\cdots,p_\kappa(\alpha_\kappa)$（见 6.2.1）。正如 7.1.1 中指出的那样（即 70
那里讨论的第二项），所有这些量可能依赖于 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的所有信息（见第 69 页脚注③），因为此时的 M_κ 是一个机会动作。也就是说，在 $\mathscr{A}_\kappa$ 的每一集合 A_κ 内，α_κ 和 $p_\kappa(1),\cdots,p_\kappa(\alpha_\kappa)$ 必须是常数[②]，但它们随 A_κ 的改变而变化。

在这些 A_κ 中的每一个之内，选择从备择 $A_\kappa(1),\cdots,A_\kappa(\alpha_\kappa)$ 中做出，即选择一个 $\sigma_\kappa,\kappa=1,\cdots,\alpha_\kappa$（见 6.2.2）。这可以通过如下方式来描述：指定 A_κ 的 α_κ 个不相交的子集，这些子集对应着 A_κ 所表达的约束；再加上已经发生的 σ_κ 的选择。我们记这些集合为 C_κ，它们的系记为 $\mathscr{C}_\kappa(0)$，$\mathscr{C}_\kappa(0)$ 由所有的 $C_\kappa(0)$ 组成，而每一个 C_κ 是 $B_\kappa(0)$ 的一个

---

① 因此，$\mathscr{B}_\kappa$ 实际上不是一个集合，也不是一个分拆，而是一个更微妙的概念：以这种枚举方式，它是 $B_\kappa(k),k=0,1,\cdots,n$ 的集合。

然而，它具有 8.3.1 中的性质（8:B:a）和（8:B:b），而这些性质是描述一个分拆的性质。不过，即使是在那里，我们也必须允许一个例外：集合 $\mathscr{B}_\kappa$ 中能够有空集。——69，④

② 我们在 $B_\kappa(0)$ 内，因此所有这些仅指同时是 $B_\kappa(0)$ 的子集的那些 A_κ。——70，①

子集。因此，$\mathscr{C}_\kappa(0)$是$B_\kappa(0)$的一个分拆。又由于$\mathscr{C}_\kappa(0)$中每个C_κ也是$\mathscr{A}_\kappa$中的某个A_κ的子集，从而$\mathscr{C}_\kappa(0)$是$\mathscr{A}_\kappa$的一个子分拆。

α_κ由$\mathscr{C}_\kappa(0)$决定。[①] 因此，我们不必再更多地提到它们。关于$p_\kappa(1),\cdots,p_\kappa(\alpha_\kappa)$，这一描述本身意味着：$\mathscr{C}_\kappa(0)$中每一个$C_\kappa$都必须联系着一个数$p_\kappa(C_\kappa)$（它的概率），其性质与第50页脚注②中概率的性质相同。[②]

9.1.5 其次，假如M_κ是一个个人动作，如第k个玩家的动作，$k=1,\cdots,n$，即我们在集合$B_\kappa(k)$内。在这种情况下，我们必须指定玩家k在M_κ的信息状况。在6.3.1中，这是由集合A_κ描述的，在7.2.1中，它是由函数族Φ描述的，后者是更为一般和最终的形式。根据这一描述，k在M_κ时知道所有函数Φ中$h(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1})$的取值，且仅仅知道这些。这一信息量把$B_\kappa(k)$剖分为若干不相交的子集，对应着$k$在$M_\kappa$时的各种可能的信息内容。我们记这些集合为$D_\kappa$，它们的系记为$\mathscr{D}_\kappa(k)$。因此，$\mathscr{D}_\kappa(k)$是$B_\kappa(k)$的一个分拆。

k在M_κ时的信息当然是此时存在着的总信息的一部分，而此时的总信息量包含在9.1.2中的$\mathscr{A}_\kappa$之中。因此，$\mathscr{A}_\kappa$的一个A_κ是$B_\kappa(k)$的一个子集，A_κ中不存在任何含糊性，即这个A_κ不可能与$\mathscr{A}_\kappa$中两个或两个以上的D_κ有共同元素。这意味着问题中的A_κ必定是$\mathscr{D}_\kappa$中某个D_κ的一个子

① α_κ是$\mathscr{C}_\kappa(0)$中C_κ的个数，这些C_κ是给定的A_κ的子集。——70，②

② 即每一个$p_\kappa(C_\kappa)\geq 0$，且对于每一个A_κ和$\mathscr{C}_\kappa(0)$中同时是A_κ的子集的C_κ的并，$\sum p_\kappa(C_\kappa)=1$。——70，③

集。换句话说，在 $B_\kappa(k)$ 内，$\mathscr{A}_\kappa$ 是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的一个子分拆。

实际上，在 M_κ 时，这一博弈的进程已经被限制于 $\mathscr{A}_\kappa$ 的一个集合 A_κ 之内。但是玩家 k 并不知道那么多：对他来说，这一博弈也就是在 $\mathscr{D}_\kappa$ 中的一个子集 D_κ 之内。现在，他必须在备择 $A_\kappa(1),\cdots,A_\kappa(\alpha_\kappa)$ 中做出选择，即从 $1,\cdots,\alpha_\kappa$ 中选择 σ_κ 的一个取值。正如我们在 7.1.2 和 7.2.1（尤其是 7.2.1 末尾）指出的那样，α_κ 也许是可变的，但它只能依赖于 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 包含的信息。也就是说，如果我们把自己限制在 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的一个集合 D_κ 之内，它必须在 D_κ 内是一个常数。因此，σ_κ 的选择能够通过指定 D_κ 的 α_κ 个不相交的子集来描述，它们对应着由 D_κ 所表达的约 71
束，再加上已经做出的 σ_κ 的选择。我们记这些集合为 C_κ，记它们的系为 $\mathscr{C}_\kappa(k)$，它由 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 中所有 D_κ 内的 C_κ 组成。而且，由于 $\mathscr{C}_\kappa(k)$ 的每一个 C_κ 是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 中某个 D_κ 的子集，$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的一个子分拆。

α_κ 由 $\mathscr{C}_\kappa(k)$ 决定①，因此，我们不必更多地提到它们。α_κ 绝不能够是零，即给定 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 中的一个 D_κ，$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 中是 D_κ 的子集的某些 C_κ 必须存在。②

9.2　分拆及其性质讨论

9.2.1　在上一节中，我们已经完全地描述了动作 M_κ

---

① α_κ 是 $\mathscr{C}_\kappa(k)$ 中属于给定的 A_κ 的子集的那些 C_κ 的个数。——71，①

② 我们只对 $k=1,\cdots,n$ 要求这一点。对于 $k=0$，存在着 $B_\kappa(0)$ 的一个子集 A_κ 取代 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 中的 D_κ。但是，对于这种情况来说，α_κ 不等于零是不必说的事情，因为它是第 70 页脚注③中的一个序列，如果不存在我们想要的 C_κ，$\sum p_\kappa(C_\kappa)$ 就会等于 0 而不是 1。——71，②

之前那一时刻的情况。接下来，我们要讨论的是，顺着动作 $\kappa=1,\cdots,\nu$ 继续下去，什么事情将会发生呢？为了方便，我们增加一个 κ 的取值，即 $\kappa=\nu+1$，它对应着博弈的结束，即它紧随着最后一个动作 M_ν。

正如我们在上一节中讨论的那样，对于 $\kappa=1,\cdots,\nu$，我们有如下分拆：

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_\kappa,\mathscr{B}_\kappa&=[B_\kappa(0),B_\kappa(1),\cdots,B_\kappa(n)],\\&\mathscr{C}_\kappa(0),\mathscr{C}_\kappa(1),\cdots,\mathscr{C}_\kappa(n),\\&\mathscr{D}_\kappa(1),\cdots,\mathscr{D}_\kappa(n)\end{aligned}$$

除了 $\mathscr{A}_\kappa$ 之外，它们涉及动作 M_κ，因此对于 $\kappa=\nu+1$，它们不必且不能被界定。不过，正如我们在 9.1.2 中讨论的那样，$\mathscr{A}_{\nu+1}$是有意义的：它代表着有关一次博弈的能够想到的全部信息，即该次博弈本身。[①]

这里，我们想到两点说明：从上面的结果的意义上说，$\mathscr{A}_1$ 对应着一个任何信息都得不到的时刻。因此，$\mathscr{A}_1$ 应该由集合 W 组成。另一方面，$\mathscr{A}_{\nu+1}$对应着实际认清已经发生的该博弈的可能性。因此，$\mathscr{A}_{\nu+1}$是一元集的一个系。

接下来，我们描述从 κ 到 $\kappa+1$ 的过渡，$\kappa=1,\cdots,\nu$。

9.2.2 当 κ 被 $\kappa+1$ 取代时，$\mathscr{B}_\kappa$、$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 和 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的变化没有什么可说的。我们前面的讨论已经表明，当这一替换做出时，任何事情都可能发生在它们之中。

不过，指出如何从 $\mathscr{A}_\kappa$ 得到 $\mathscr{A}_{\kappa+1}$ 还是可能的。

---

① 从第 69 页脚注①意义上说，$\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 的所有取值。而且，正如我们在 6.2.2 中指出的那样，序列 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$ 描述该博弈本身。——71，③

$\mathscr{A}_{\kappa+1}$ 中的信息等于 $\mathscr{A}_{\kappa}$ 中的信息加上与动作 M_{κ} 有关的选择的结果①，从 9.1.2 中的讨论来看，这应该是清楚的。因此，$\mathscr{A}_{\kappa+1}$ 中的信息比 $\mathscr{A}_{\kappa}$ 中的信息多出来的部分正是 $\mathscr{C}_{\kappa}(1),\cdots,\mathscr{C}_{\kappa}(n)$ 中包含的信息。 72

这意味着，我们可以通过把分拆 $\mathscr{A}_{\kappa}$ 与所有分拆 $\mathscr{C}_{\kappa}(0),\mathscr{C}_{\kappa}(1),\cdots,\mathscr{C}_{\kappa}(k)$ 叠置且丢掉空集而得到分拆 $\mathscr{A}_{\kappa+1}$。

如上一节中讨论的那样，由于 $\mathscr{A}_{\kappa}$ 与 $B_{\kappa}(k)$ 的关系以及 $\mathscr{C}_{\kappa}(k)$ 与 $B_{\kappa}(k)$ 的关系，关于这一叠置过程，我们有更多能够说的东西。

在 $B_{\kappa}(0)$ 内，$\mathscr{C}_{\kappa}(0)$ 是 $\mathscr{A}_{\kappa}$ 的一个子分拆（见 9.1.4 中的讨论）。因此，$\mathscr{A}_{\kappa+1}$ 与 $\mathscr{C}_{\kappa}(0)$ 重合。在 $B_{\kappa}(k)$ 中，$k=1,\cdots,n$，$\mathscr{C}_{\kappa}(k)$ 和 $\mathscr{A}_{\kappa}$ 都是 $\mathscr{D}_{\kappa}(k)$ 的子分拆（见 9.1.5 中的讨论）。因此，$\mathscr{A}_{\kappa}$ 以如下方式得到：首先取 $\mathscr{D}_{\kappa}(k)$ 中的每一个 D_{κ}，然后对每一个这样的 D_{κ}，取 $\mathscr{A}_{\kappa}$ 中同时是这一 D_{κ} 的子集的所有 A_{κ} 和 $\mathscr{C}_{\kappa}(k)$ 中同时是这一 D_{κ} 的子集的所有 C_{κ}，并形成交集 $A_{\kappa}\cap C_{\kappa}$。

每一个集合 $A_{\kappa}\cap C_{\kappa}$ 代表这样一些博弈，这些博弈产生于第 k 个玩家在动作 M_{κ} 做出选择 C_{κ} 的时候，不过玩家 k 面对的是 D_{κ} 中的信息，而其所处情况其实是 A_{κ}（D_{κ} 的一个子集）中的情况，以至把事情限制为 C_{κ}。

根据我们前面的讨论，这一选择是可能的，所以存在着这样的博弈。也就是说，集合 $A_{\kappa}\cap C_{\kappa}$ 必定不是空集。我们重述如下：

(9:C)　　如果 $\mathscr{A}_{\kappa}$ 中的 A_{κ} 和 $\mathscr{C}_{\kappa}(k)$ 中的 C_{κ} 是 $\mathscr{D}_{\kappa}$ 中同一

---

① 用我们早先的术语说：σ_{κ} 的取值。——71，④

D_κ 的子集，那么，$A_\kappa \cap C_\kappa$ 必定不是空集。

9.2.3 存在着这样的博弈，其中，一个人被引诱而置这一条件于不顾。这些博弈是这样一些博弈，其中，一个玩家可以做出一个合理的选择，而这一选择随后成了一个被禁止的选择。例如，第 58 页脚注①中提到的克里斯皮尔棋：其中，一个玩家能够在自己的棋盘上做出一个明显是可能的选择（“动作”），只是后来才（有可能）被“裁判”告知那是一个“不可能的”选择。

然而，这是一个伪造的例子。问题中的动作最好被分解为若干动作形成的一个序列，最好还是给出经过深思熟虑的克里斯皮尔棋规则。

这种博弈由一个动作序列组成。在每一动作时，“裁判”向两位玩家声明上一动作是否是“可能的”动作。如果它不是，像上一动作那样，下一动作是同一玩家的个人动作。如果它是，那么，下一动作是另一个玩家的个人动作。在每一动作，玩家被告知此前他的所有动作、两位玩家此前所有选择的“可能性”或“不可能性”的整个序列，以及此前玩家遭受的有威胁的“将军”或被吃掉的棋子的情况。但他仅仅知道他自己的损失。否则，这一博弈就像国际象棋了，有一个第 50 页脚注③意义
73 上的停止规则，且进一步增强为，一个玩家不可以在其不中断的个人动作序列中两次做出（“尝试”）同一选择。（实际中，玩家自然需要两个棋盘，它们都不在其视野之内，但都在“裁判”的视野之内，这样才能满足这些信息条件。）

无论如何，我们都将坚持上述条件。你将会看到，这

样做十分便于我们后面的讨论(见 11.2.1)。

9.2.4 最后,用我们新的术语说,对玩家 k,我们再次引入 6.2.2 中的量 J_k, $k=1,\cdots,n$。J_k 是玩家 k 的结果。J_k 必定是已经发生的这一实际博弈的一个函数。[①] 如果我们用符号 π 记这一博弈,那么,我们可以说:J_k 是变量 π 的函数,π 的变动范围是 Ω。也就是说:

$$J_k = J_k(\pi), \qquad \pi \text{ 属于 } \Omega, \qquad k=1,\cdots,n。$$

10. 公理化描述

10.1 公理及其解释

10.1.1 现在,我们已经完成了用集合和分拆这一新技术描述一般博弈的概念。全部结构和定义已经在过去的几节中得到了充分的阐释,因此我们现在能够给一个博弈下一个严格的公理化定义。这当然是我们在前面几节中进行的广泛讨论的精确重述。

首先,我们不加任何评论地给出精确定义:[②]

(10:A:a) 一个数 ν。

(10:A:b) 一个有限集 Ω。

(10:A:c) 对于每一个 $k=1,\cdots,n$:一个函数

$$J_k = J_k(\pi), \qquad \pi \text{ 属于 } \Omega。$$

---

① 用我们原来的术语说,我们有 $J_k = J_k(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)$。见 6.2.2。——73,①

② 其"解释"见 10.1.1 末尾和 10.1.2 中的讨论。——73,②

(10:A:d) 对于每一个 $\kappa = 1, \cdots, \nu, \nu + 1$:$\Omega$ 的一个分拆 $\mathscr{A}_\kappa$。

(10:A:e) 对于每一个 $\kappa = 1, \cdots, \nu$:Ω 的一个分拆 $\mathscr{B}_\kappa$。$\mathscr{B}_\kappa$ 由 $n+1$ 个集合 $B_\kappa(k)$ 组成,$k = 1, \cdots, n$,并以此方式枚举。

(10:A:f) 对于每一个 $\kappa = 1, \cdots, \nu$ 和每一个 $k = 0, 1, \cdots, n$:$B_\kappa(k)$ 中的一个分拆 $\mathscr{C}_\kappa(k)$。

(10:A:g) 对于每一个 $\kappa = 1, \cdots, \nu$ 和每一个 $k = 1, \cdots, n$:$B_\kappa(k)$ 中的一个分拆 $\mathscr{D}_\kappa(k)$。

(10:A:h) 对于每一个 $\kappa = 1, \cdots, \nu$ 和 $\mathscr{C}(0)$ 中每一个 C_κ:一个数 $p_\kappa(C_k)$。

这些东西必须满足如下性质:

(10:1:a) $\mathscr{A}_\kappa$ 是 $\mathscr{B}_\kappa$ 的一个子分拆。

(10:1:b) $\mathscr{C}_\kappa(0)$ 是 $\mathscr{A}_\kappa$ 的一个子分拆。

(10:1:c) 对于 $k = 1, \cdots, n$:$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的一个子分拆。

(10:1:d) 对于 $k = 1, \cdots, n$:在 B_κ 之内,$\mathscr{A}_\kappa$ 是 $D_\kappa(k)$ 的一个子分拆。

74 (10:1:e) 对于每一个 $\kappa = 1, \cdots, \nu$ 和 $\mathscr{A}_\kappa$ 中同时是 $B_\kappa(0)$ 的子集的每一个 A_κ:对于 $\mathscr{C}_\kappa(0)$ 中同时是这个 A_κ 的子集的所有 C_κ,$p_\kappa(C_\kappa) \geqq 0$,且它们的和 $\sum p_\kappa(C_\kappa) = 1$。

(10:1:f) $\mathscr{A}_1$ 由 Ω 这一个集合组成。

(10:1:g) $\mathscr{A}_{\nu+1}$ 由一个一元集组成。

(10:1:h) 对于每一个 $\kappa = 1, \cdots, \nu$:$\mathscr{A}_\kappa$ 得自 $\mathscr{A}_\kappa$ 与所有 $\mathscr{C}_\kappa(k)$,$k = 0, 1, \cdots, n$ 的叠置(详情

见 9.2.2)。

(10:1:i)　　对于 $\kappa=1,\cdots,\nu$:如果 $\mathscr{A}_\kappa$ 中的 A_κ 和 $\mathscr{C}_\kappa(k)$ 中的 $C_k, k=1,\cdots,n$ 是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 中同一 D_κ 的子集,那么,$A_\kappa\cap C_\kappa$ 必定不是空集。

(10:1:j)　　对于 $\kappa=1,\cdots,\nu$ 和 $k=1,\cdots,n$,以及 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 中的每一个 D_κ:$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 中必定存在某个 $C_\kappa(k)$ 是 D_κ 的子集。

我们应该本着现代公理化方法的精神来看待这一定义。我们甚至避开了给(10:A:a)—(10:A:h)中引入的这些数学概念命名,以免名称的字面意义暗示任何意义。由于这一绝对的“纯粹性”,这些概念能够成为严格数学研究的对象。①

这一程序最适合建立严格定义的概念。严格分析完成之后,再将其运用于特定的符合直觉的东西。关于这一点,也可见第 1 章 4.1.3 中关于模型在物理学中发挥的作用的讨论:有关一个直觉的系统的公理化模型类似于(同样直觉的)物理系统的数学模型。

只要理解了这一点,提倡公理化就是无害的,因为这一公理化定义是此前的详细经验讨论的提炼。而且,如果我们给引入的概念以适当的名字,最大程度地提示其直觉

① 这类似于逻辑学、几何学等学科中表现出来的公理化态度。因此,在公理化的几何学中,已经成了惯例的是,点、线和面的概念并非某种符合直觉的先验的东西,它们只不过是符号,是具有公理中假设的性质的东西的符号。见希尔伯特(D. Hilbert):*Die Grundlagen der Geometrie*,莱比锡,1899;英文第二版,芝加哥,1910。——74,①

背景，这将有利于其使用，使其结构更易于理解。基于这种精神，说明我们的假设(10:1:a)—(10:1:j)的"含义"——即其产生的直觉背景——也是有益的。

所有这些自然是前面几节中的直观理由的准确概括。

10.1.2 我们首先说明 10.1.1 中(10:A:a)—(10:A:h)的概念的技术名称。

75 (10:A:a*) ν 是博弈 Γ 的长度。

(10:A:b*) Ω 是 Γ 的所有博弈的集合。

(10:A:c*) $J_\kappa(\pi)$是玩家 k 在博弈 π 中的结果。

(10:A:d*) $\mathscr{A}_\kappa$ 是裁判的信息模式，$\mathscr{A}_\kappa$ 的一个 A_κ 是该裁判在动作 M_κ 时的实际信息。($\kappa=\nu+1$：博弈结束的时刻。)

(10:A:e*) $\mathscr{B}_\kappa$ 是动作 M_κ 的指派模式，$\mathscr{B}_\kappa$ 的一个 $B_\kappa(k)$是动作 M_κ 的实际指派。

(10:A:f*) $\mathscr{C}_\kappa(k)$是选择模式，$\mathscr{C}_\kappa(k)$的一个 C_κ 是玩家 k 在动作 M_κ 的实际选择。($\kappa=0$：由机会决定。)

(10:A:g*) $\mathscr{D}_\kappa(k)$是玩家 k 的信息模式，$\mathscr{D}_\kappa(k)$的一个 D_κ 是玩家 k 在动作 M_κ 时的实际信息。

(10:A:h*) $p_\kappa(C_\kappa)$是在(机会)动作 M_κ 时实际选择 C_κ 的概率。

接下来，如 10.1.1 的总结中所说的那样，我们用上述专门术语来阐述条件(10:1:a)—(10:1:j)的"含义"。

(10:1:a*) 动作 M_κ 时，裁判的信息模式包含这一动作的指派。

(10:1:b*)　一个机会动作 $\mathcal{M}_\kappa$ 时的选择模式包含裁判在此时的信息模式。

(10:1:c*)　玩家 k 的个人动作 $\mathcal{M}_\kappa$ 时的选择模式包括玩家 k 此时的信息模式。

(10:1:d*)　在动作 $\mathcal{M}_\kappa$，在这一动作是玩家 k 的一个个人动作的程度上，裁判的信息模式包含 k 在这一动作时的信息模式。

(10:1:e*)　在机会动作 $\mathcal{M}_\kappa$，各个备择出现的概率如同不相交而穷尽的一组备择的概率。

(10:1:f*)　在第一个动作时，裁判的信息是空的。

(10:1:g*)　在博弈结束时，裁判的信息模式决定整个博弈。

(10:1:h*)　在动作 $\mathcal{M}_{\kappa+1}$ 时，裁判的信息模式得自动作 $\mathcal{M}_\kappa$（$\kappa=\nu$：博弈结束）时的信息模式与动作 $\mathcal{M}_\kappa$ 时做出的选择的叠置。

(10:1:i*)　设动作 $\mathcal{M}_\kappa$ 是一个给定的动作，它是玩家 k 的一个个人动作，玩家 k 在这一动作时的实际信息也是给定的。如果裁判在这一动作的实际信息和玩家 k 在这一动作的实际选择都在这一实际信息之内（即它的提炼），那么，它们是相容的，即它们在实际博弈中出现。

(10:1:j*)　设给定动作 $\mathcal{M}_\kappa$，玩家 k 的一个个人动作，且玩家 k 在动作 $\mathcal{M}_\kappa$ 的任何实际信息也是给定的，那么，玩家 k 能够实际有的备择个数不是 0。 76

这概括了我们对一个博弈的一般方案的公式化描述。

10.2 公理的逻辑讨论

10.2 我们尚未讨论形式逻辑中有关每一公理化体系的一些传统问题:公理的一致性、完全性和独立性。[①]我们的体系有上述性质中的第一和最后一个,而不具有第二个。这些事实是容易证明的,而且,不难看出,情况本来就应该是这样。总之:

一致性:博弈的存在性是毫无疑问的,我们只不过给出了其严格形式。随后我们将详细讨论几个博弈的形式化(见18.19中的例子)。从严格数学(逻辑学)角度看,哪怕是最简单的博弈,也能够用来建立一致性。不过,我们真正感兴趣的自然是较为复杂的博弈,它们才是真正有意义的。[②]

完全性:这一点不成立,因为存在着很多不同的博弈满足这些公理。关于一些有说服力的例子,见上面的参考文献。

读者将会看到,在这种情况下,我们并不刻意追求完全性,因为我们的公理必须界定一类实体(博弈),而不是

---

① 见希尔伯特(同上);凡贝仑(O. Veblen)和扬(J. W. Young):《射影几何》,纽约,1910;外尔(H. Weyl):Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften, in *Handbuch der Philosophie*,慕尼黑,1927。——76.①

② 一个最简单的博弈是:$\nu=0$,Ω 只有一个元素,如 π_0。因此,不存在 $\mathscr{B}_\kappa$,$\mathscr{C}_\kappa(k)$,$\mathscr{D}_\kappa(k)$,惟有的一个 $\mathscr{A}_\kappa$ 是 $\mathscr{A}_1$,它由 Ω 一个元素组成。令 $J(\pi_0)=0, k=1,\cdots,n$。这一博弈的一个明显的描述是,没有人做任何事情且什么事情也不发生。这还表明,在这种情况下,一致性不是一个有意义的问题。——76.②

惟一一个实体。[①]

独立性:这容易建立,不过我们不在这里讨论它。

10.3 关于公理的一般说明

10.3 关于这一公理化,尚有两点应该说明:

首先,我们遵循了经典的过程以实现直觉上——经验上——给定的想法进行严格的形式化描述。实际上,博弈的概念以一种令人满意的形式存在于一般经验之中,不过,它过于松散而不适于严格研究。追随我们至此的读者将会看到这种不精确性如何被消除,"模糊区域"如何逐渐变小,一个精确的描述如何逐步形成。 77

其次,我们希望这也是有关如下有众多争议的命题的一个正面例子:即对人类行为进行数学描述和讨论是可能的,虽然人类行为中强调的是心理方面。在这种情况下,心理因素是以如下方式被考虑进去的,即对决策、决策所依赖的信息以及(不同动作的)此类信息集合之相互关联性进行必要的分析。这一关联性源于随时出现的各种信息集合之间的联系以及玩家们相互之间的投机性假设。

当然,有很多重要的心理方面是我们从未触及过的,但也存在着这样一个事实,即一组基本的心理现象已经被公理化了。

---

① 在实现公理化的一般逻辑方法中,这是一个重要特点。因此,欧几里得几何的公理描述惟一一个对象——而数学中的群论的公理或物理学中有理力学的公理就不是这样,因为存在着很多不同的群和很多不同的力学体系。——76,③

10.4 图示

10.4.1 我们不得不使用多个分拆来表示一个博弈。这些分拆的图示并不容易。我们将试图系统地处理这一问题：即便是相对简单的博弈似乎也会导致复杂而混乱的图形，这样就失去了图形表示常有的优点。

然而，我们有可能对图形表示做出一些限制。我们将对其进行一些说明。

首先，根据 10.1.1 中的（10:1:h）或 10.1.2 中的（10:1:h*）（即回忆其“含义”），$\mathscr{A}_{\kappa+1}$ 是 $\mathscr{A}_{\kappa}$ 的一个子分拆。也就是说，在分拆序列 $\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_{\kappa+1}$ 中，每一个都是上一个的一个子分拆。因此，这可以用 8.3.2 中的图 9，即树形来表示。（图 9 并不是典型的：因为博弈 Γ 的长度是固定的，树的每一个枝都必须伸展到其充分高度。见 10.4.2 中图 10。）我们并不试图把 $B_{\kappa}(k)$、$\mathscr{C}_{\kappa}(k)$ 和 $\mathscr{D}_{\kappa}(k)$ 添加到这个图中。

存在着这样一类博弈，其中，序列 $\mathscr{A}_1,\cdots,\mathscr{A}_{\nu},\mathscr{A}_{\nu+1}$ 描述了整个博弈进程。这是我们在 6.4.1 中讨论过的一类重要博弈，其中预备性与先前性是等价的。我们将在第 3 章 15 节中对其进行更多讨论。在我们目前的形式体系中，它有着简单的表示方式。

10.4.2 如我们在 6.4.1、6.4.2 和 6.4.3 中的讨论和解释所表明的那样，当且仅当每位玩家在做出一个个人动作时知道该博弈的全部历史，预备性与先前性才是等价的。假设这个玩家是第 k 个玩家，此时的动作是 M_{κ}。M_{κ} 是 k 的个人动作的断言意味着，我们在 $B_{\kappa}(k)$ 之

内。因此，这一断言是说，在 $B_\kappa(k)$ 内，玩家 k 的信息模式与裁判的信息模式重合。也就是说，$\mathscr{D}_\kappa(k)$ 在 $B_\kappa(k)$ 内等于 $\mathscr{A}_\kappa$。但是，$\mathscr{D}_\kappa(k)$ 是 $B_\kappa(k)$ 中的一个子分拆，因此，上述说法意味着 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 是 $\mathscr{A}_\kappa$ 落在 $\mathscr{B}_\kappa(k)$ 中的那一部分。 78

我们将这一点重述为：

(10:B)　　当且仅当 $\mathscr{D}_\kappa$ 是 $\mathscr{A}_\kappa$ 落人 B_κ 之内的那一部分时，预备性与先前性重合，即每位玩家在做出一个个人动作时完全知道这一博弈的整个历史。

如果情况是这样的，那么，我们能够说，$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 现在必定是 $\mathscr{A}_\kappa$ 的一个子分拆，理由是：10.1.1 中的(10:1:c)和(10:B)。对于个人动作，即 $k=1,\cdots,n$，这一点成立，不过，对于 $k=0$，从 10.1.1 中的(10:1:b)可直接得出这一结果。现在，10.1.1 中的(10:1:h)允许从这一结果推断出如下结论(细节见 9.2.2)：$\mathscr{A}_{\kappa+1}$ 与 $B_\kappa(k)$ 中的 $\mathscr{C}_\kappa(k)$ 重合，$k=0,1,\cdots,n$。(我们本来能够利用 10.1.2 中相应的结论，即这些概念的“含义”。我们把这一观点的文字表达留给读者。)不过，$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 是 $B_\kappa(k)$ 的一个子分拆，因此上述说法意味着，$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 正是 $\mathscr{A}_{\kappa+1}$ 落在 $B_\kappa(k)$ 内那一个部分。

我们将这一点重述为：

(10:C)　　如果条件(10:B)得到满足，那么，$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 是 $\mathscr{A}_{\kappa+1}$ 落在 $B_\kappa(k)$ 内的那一部分。

因此，当预备性与先前性一致的时候，那么，在我们目前的形式体系中，对于每一个 $\kappa=0,1,\cdots,\nu$，序列 $\mathscr{A}_1,\cdots,$

79 $\mathscr{A}_{\nu}$,$\mathscr{A}_{\nu+1}$和 B_k,$k=1,\cdots,n$ 完全描述该博弈。也就是说,8.3.2 中图 9 中的图形必须惟一地通过如下方法来加强,即把每一个 $\mathscr{A}_{\kappa}$ 中属于同一集合 $\mathscr{B}_{\kappa}(k)$ 的那些元素围在一起(见 10.4.1 中的说明)。我们可以用一条线将它们圈起来,在这条线上写上 $B_{\kappa}(k)$ 的号码 k。空的 $B_{\kappa}(k)$ 能够被忽略。图 10 是一个 $\nu=5,n=3$ 的例子。

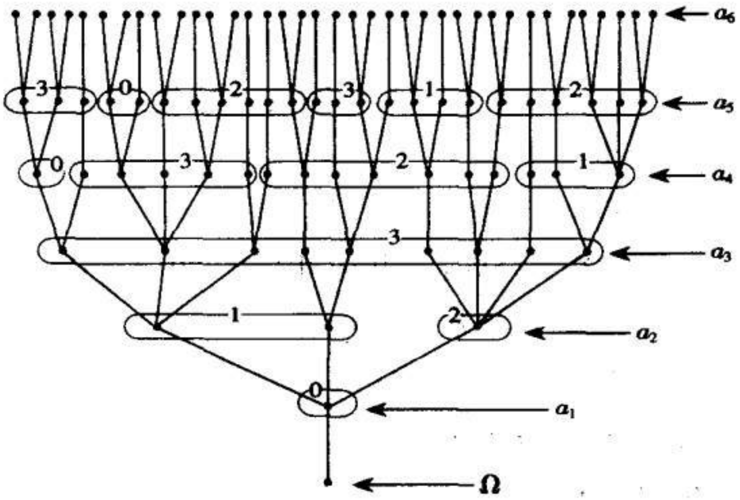


图 10

很多这类博弈中,甚至这一额外工具也是不必要的,因为对于每一个 κ,只有一个 $B_{\kappa}(k)$ 不是空集。也就是说,每一个动作的特征独立于此前的博弈进程。[①] 所以,在每一个 $\mathscr{A}_{\kappa}$,指出动作 M_{κ} 的特征,即惟一一个 $B_{\kappa}(k)\neq\ominus$,$k=0,1,2,\cdots,n$ 也就足够了。

① 国际象棋就是这样。巴加门的规则允许两种方式的解释。——79,①

11. 策略和博弈描述的最终简化

11.1 策略的概念及其形式化描述

11.1.1 让我们回到博弈 Γ 的一个实际博弈过程 π。

动作 $\mathcal{M}_\kappa$ 按照 $\kappa=1,\cdots,\nu$ 的顺序发生。在每一个动作 $\mathcal{M}_\kappa$，一个选择被做出。如果这一博弈属于 $B_\kappa(0)$，那么，按机会做出选择；如果这一博弈属于 $B_\kappa(k)$，则由玩家 k 做出，$k=1,\cdots,n$。选择就是从 $\mathscr{C}_\kappa(k)$（$k=0$ 或 $k=1,\cdots,n$）中挑选一个 C_κ，这一博弈就被限制于 C_κ。如果这个选择是由玩家 k 做出的，那么，需要小心的是，这一玩家的信息模式应该限于此刻的 $\mathscr{D}_\kappa(k)$。（如 6.4.2 末尾的桥牌和 9.2.3 中的克里斯皮尔棋所表明的那样，这能够成为一个有着实际困难的问题。）

现在，我们设想，每一位玩家 $k=1,\cdots,n$ 并不是到了非要做出决策的时候才做出决策，而是考虑到可能出现的各种情况提前做出决策，即玩家 k 开始博弈时有一个完备的计划：视可能出现的情况以及规则允许他在此时拥有的实际信息，这一计划指定他将做出的选择。我们把这样一个计划称为**策略**。

注意，如果我们要求每位玩家在开始的时候都有这样一个完备的计划，即一个策略，我们并没有限制他的行动自由。尤其是，我们并没有因此而强制他们做出决策时所使用的信息要少于实际博弈中本来能够得到的

信息。这是因为，这里的策略只不过假设每一具体决策是实际博弈中可用于这一目的的实际信息量的函数。对于玩家来说，我们的假设带来的惟一额外负担是心智上的负担，即尽管他将仅仅经历一次博弈，但对于所有可能出现的情况，他要按照一定的行为准则做好准备。不过，在数学分析范围之内，这是一个没有害处的假设（见 4.1.2）。

80 **11.1.2** 博弈的机会成分能够以同样方式得到处理。

很显然，对于机会动作来说，没有必要等到动作到来那一刻才做出相应决策。一个裁判可以提前做出所有这些决策，并在时刻到来时按照规则允许的信息量向玩家揭示结果。

的确，裁判无法提前知道哪一个动作将是机会动作，也不知道它们的概率。一般来说，这依赖于实际博弈进程。但是，就像上面考虑的策略那样，他可以为所有偶然情况做好准备：他能够提前决定，每当一个机会动作出现的时候，对于该博弈此前的每一可能进程——即对此刻每一可能的实际裁判信息，这一个机会动作中选择的结果应该是什么。在这些条件下，由规则描述的上述情况出现的概率就会充分决定下来，从而裁判能够以适当的概率为受机会影响的每一必要选择做好安排。

然后，像上面描述的那样，裁判能够在恰当的时间，以恰当的程度向玩家们公布结果。

所有能够想像出的机会动作的选择的这一预先决策被称为**裁判的选择**。

我们在上一节中看到，玩家 k 的所有个人动作的选择

被玩家 k 的策略取代是合理的。也就是说，这并不改变博弈 Γ 的基本特征。显然，所有机会动作的选择由裁判的选择取代也是这样。

11.1.3 接下来，我们要对策略的概念和裁判选择的概念进行形式化描述。前两节的定性讨论已经明确这一任务。

玩家 k 的一个策略：考虑动作 $\mathcal{M}_\kappa$。假设这是玩家 k 一个个人动作，即这一博弈在 $B_\kappa(k)$ 中。考虑玩家在此刻的一个可能的实际信息，即 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的一个 D_κ。那么，问题中的策略必定决定他在这一时刻的选择，即 $\mathscr{C}_\kappa(k)$ 中同时是上述 D_κ 的一个子集的 C_κ。

形式化描述：

(11:A)　　玩家 k 的一个策略是对每一个 $\kappa=1,\cdots,\nu$ 和 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 中每一个 D_κ 定义的函数 $\sum_k(\kappa;D_\kappa)$，而且其取值

$$\sum_k(\kappa;D_\kappa) = C_\kappa$$

总是具有如下性质：C_κ 属于 $\mathscr{C}_\kappa(k)$ 且是 D_κ 的一个子集。

满足上述要求的策略即函数的确存在且完全符合 10.1.1 中的假设(10:1:j)。

裁判的一个选择：　81

考虑一个动作 $\mathcal{M}_\kappa$。假设这是一个机会动作，即假设该博弈在 $B_\kappa(0)$ 中。考虑裁判在此刻的一个可能的实际信息，即考虑 $\mathscr{A}_\kappa$ 中同时是 $B_\kappa(0)$ 的一个子集的一个 A_κ。那么，问题中裁判的选择必定决定这一时刻的机会选择，

即 $\mathscr{C}_\kappa(0)$ 中同时是 A_κ 的一个子集的一个 C_κ。

形式化描述：

(11:B)　　裁判的一个选择是对每一个 $\kappa=1,\cdots,\nu$ 和 $\mathscr{A}_\kappa$ 中同时是 $B_\kappa(0)$ 的一个子集的每一个 A_κ 定义的一个函数 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$，而且其取值

$$\sum\nolimits_0(\kappa;A_\kappa)=C_\kappa$$

总具有如下性质：C_κ 属于 $\mathscr{C}_\kappa(0)$ 且是 A_κ 的一个子集。

关于裁判的选择即满足上述条件的函数 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$ 的存在性，见(11:A)后面的说明和第71页脚注②。

由于裁判选择的结果依赖于机会，相应概率必须被指定。现在，裁判的选择是相互独立的随机事件的一个综合。如11.1.1中描述的那样，对于每一个 $\kappa=1,\cdots,\nu$ 和 $\mathscr{A}_\kappa$ 中同时是 $B_\kappa(0)$ 的一个子集的每一个 A_κ，即对于 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$ 的定义域中的每一对 κ,A_κ，存在这样一个事件。一旦这一事件受到关注，具体结果 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)=C_\kappa$ 的概率就成了 $p_\kappa(C_\kappa)$。因此，由函数 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$ 表示的裁判的全部选择的概率是个别概率 $p_\kappa(C_\kappa)$ 的乘积。①

形式化描述：

(11:C)　　由 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$ 表示的*裁判的选择*的概率是概率 $p_\kappa(C_\kappa)$ 的乘积，其中 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)=C_\kappa$，且 κ，

① 这些随机事件必须被当作相互独立的事件。——81，①

A_κ 取遍 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$ 的定义域[见(11:B)]。

如果我们对所有 (κ, A_κ) 考虑 10.1.1 中的条件(10:1:e),并求它们两两之间的乘积,那么,(11:C)的概率都不小于 0,且它们的和等于 1。本来就应该是这样,因为裁判的所有选择是互不相交且穷尽的备择的一个系。

11.2 博弈描述的最终简化

11.2.1 如果玩家 $k=1,\cdots,n$ 已经采取了一个确定的策略,且裁判的选择也已经被挑选出来,那么,这些东西惟一地决定该博弈的进程及其相应结果。根据上面关于 82
这些概念的文字描述,这一点应该是清楚的,不过一个同样简单的正式证明也是能够给出的。

记问题中的策略为 $\sum_k(\kappa;D_\kappa)$, $k=1,\cdots,n$,且裁判的选择记为 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$。我们将确定裁判在每一时刻 $\kappa=1,\cdots,\nu,\nu+1$ 的实际信息。为了避免将其与上面的变量 A_κ 混淆,我们将其记为 $\bar{A}_\kappa$。

$\bar{A}_1$ 自然等于 Ω 本身。[见 10.1.1 中的(10:1:f)。]

现在,我们考虑时刻 κ, $\kappa=1,\cdots,\nu$ 且假设相应的 $\bar{A}_\kappa$ 是已知的。那么,$\bar{A}_\kappa$ 恰恰是 $B_\kappa(k)$, $k=0,1,\cdots,n$ 之一的一个子集。[见 10.1.1 中的(10:1:a)。]如果 $k=0$,那么,M_κ 是一个机会动作,且选择的结果是 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$。相应地,$\bar{A}_{\kappa+1}=\sum_0(\kappa;\bar{A}_\kappa)$。[见 10.1.1 中的(10:1:d)和 9.2.2 中的详细内容。]如果 $k=1,\cdots,n$,那么,M_κ 是玩家 k 的一个个人动作。$\bar{A}_\kappa$ 恰恰是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的一个 $\bar{D}_\kappa$ 的一个子集。

相应地，$\bar{A}_{\kappa+1}=\bar{A}\cap\sum_k(\kappa;\bar{D}_\kappa)$。[见 10.1.1 中的(10:1:h)和 9.2.2 中的细节。]

因此，我们归纳性地相继确定了 $\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{A}_3,\cdots,\bar{A}_\nu,\bar{A}_{\nu+1}$，不过，$\bar{A}_{\nu+1}$ 是一个一元集[见 10.1.1 中的(10:1:g)]，其惟一的一个元素记为 $\bar{\pi}$。

$\bar{\pi}$ 是实际发生的博弈。① 该博弈的相应结果记为 $\mathcal{J}_k(\bar{\pi})$，$k=1,\cdots,n$。

11.2.2 所有玩家的策略和裁判的选择共同决定实际博弈和每一个玩家的结果。这一事实提供了对博弈 Γ 的描述进行大幅度简化的可能性。

考虑一个既定的玩家 $k=1,\cdots,n$。建立他的所有可能的策略 $\sum_k(\kappa;D_\kappa)$，或简写为 $\sum_k$。其个数虽然巨大，却是有限的。策略的个数记为 β_k，这些策略本身记为 $\sum_k^1,\cdots,\sum_k^{\beta_k}$。

类似，建立所有可能的裁判选择 $\sum_0(\kappa;A_\kappa)$，或简写为 $\sum_0$。同样，它们的个数也是有限的。记这一个数为 β_0，裁判的选择本身记为 $\sum_0^1,\cdots,\sum_0^{\beta_0}$。记它们的概率分别为 $p^1,\cdots,p^{\beta_0}$。[见 11.1.3 中(11:C)。]所有这些概率 ≥ 0，且它们的和等于 1(见 11.1.3 末尾)。

有限个数的策略选择和裁判选择决定博弈 $\bar{\pi}$(见 11.2.1末尾)及其对于每一个玩家来说的结果，这些选择分别是 $\sum_\kappa^{\tau_\kappa}$，其中 $\tau_\kappa=1,\cdots,\beta_k$，$k=0,1,\cdots,n$。每个玩家

① $\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{A}_3,\cdots,\bar{A}_\nu,\bar{A}_{\nu+1}$ 归纳推导恰恰是实际博弈进程的数学模拟。读者应该验证其中所涉及的步骤的相似性。——82,①

的结果是 $J_k(\overline{\pi})$，其中 $k=1,\cdots,n$。相应地，我们写

(11:1)　　$J_k(\overline{\pi})=G_k(\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_n),\qquad k=1,\cdots,n$

这样，整个博弈的组成部分是：每一个玩家选取的一 83
个策略 $\sum_\kappa^{\tau_k}$，即一个数 $\tau_k=1,\cdots,\beta_k$；随机性的裁判选择，$\tau_0=1,\cdots,\beta_0$，其概率分别为 $p^1,\cdots,p^{\beta_0}$。

玩家 k 必须在没有有关其他玩家的策略和机会事件（裁判的选择）的信息的情况下选取他的策略，即 τ_k。之所以必须如此，原因在于，他在任意时刻能够拥有的信息已经包含在他的策略 $\sum_k=\sum_\kappa^{\tau_k}$ 之中，即函数 $\sum_k(\kappa;D_\kappa)$ 之中（见 11.1.1 中的讨论）。即便他对其他玩家将会采取什么样的策略有肯定看法，这些看法也必须包含在函数 $\sum_k(\kappa;D_\kappa)$ 之中。

11.2.3　所有这些意味着，Γ 被弄得回到了最简单的描述，即限于 6.2.1—6.3.1 中最不复杂的原始结构。我们有 $n+1$ 个动作，其中一个机会动作，每位玩家一个个人动作；每个动作有固定个数的备择，机会动作有 β_0 个备择，个人动作的备择个数则分别是 $\beta_1,\cdots,\beta_n$；而且，每个玩家必须在绝对不知道其他选择的结果的情况下做出他的选择。①

现在，我们甚至能够避免机会动作。如果玩家的选择已经发生，玩家 k 选择了 τ_κ，那么，机会动作总的影响是：对于玩家 k 来说，该博弈的结果可以是下述数字中的任何一个：

$$G_k(\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_n),\qquad \tau_0=1,\cdots,\beta_0,$$

其概率分别为 $p^1,\cdots,p^{\beta_0}$。因此，他的结果的“数学期望”是

---

① 由于 $n+1$ 个动作的这一完全不关联性，它们的时间排列变得无关紧要的。——83，①

$$(11:2) \qquad H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)=\sum_{\tau_0=1}^{\beta_0} p^{\tau_0} G_k(\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_n)$$

这一玩家的判断必定惟一地受这一"数学期望"的指导，因为各个动作，尤其是机会动作，完全相互独立。① 因此，起作用的惟有玩家 $k=1,\cdots,n$ 的个人动作。

因此，最终描述是：

(11:D)　n 个人的博弈 Γ，即其规则的完备体系，取决于下面数据的指定：

(11:D:a)　对于每一个 $k=1,\cdots,n$：一个数 β_k。

(11:D:b)　对于每一个 $k=1,\cdots,n$：一个函数

$$H_k=H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n),$$

$$\tau_j=1,\cdots,\beta_j \qquad j=1,\cdots,n。$$

84 该博弈的博弈进程是：

每一位玩家 k 选择一个数 $\tau_k=1,\cdots,\beta_k$。每一位玩家必须在绝对不知道其他玩家的选择的情况下做出他的选择。所有选择做出之后，它们被交给裁判，由裁判决定对于玩家 k 来说的这一博弈的结果 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$。

11.3　在一个博弈的简化型中策略的作用

11.3　注意，在这一方案中，我们没有给其他类型的"策略"留下任何余地。每一位玩家有一个动作，且只有一个动作。而且，他必须在绝对不知道任何其他事情的情

---

① 我们有资格使用这一未做修正的"数学期望"，因为如 5.2.2 末尾强调的那样，我们满足简化了的效用概念。这尤其排除了那些较为复杂的"数学期望"概念，那些概念其实是试图改进那一天真的效用概念。（如贝努里的"圣彼得堡悖论"中的"道德期望"。）——83，②

况下完成这一动作。[1] 我们的问题以这一严格最终形式是我们从 11.1.1 以来有预谋地完成的。在这一过程中，从最初的动作到策略的转变得以实现。由于我们现在把策略本身当作动作来看待，更高级的策略是不必要的。

11.4 零和约束的含义

11.4 我们以确定零和博弈（见 5.2.1）在我们的最终方案中的地位来概括上面的分析。

用 10.1.1 中的术语说，博弈 Γ 是一个零和博弈意味着：

(11:3)　对 Ω 中所有的 π，　$\sum_{k=1}^{n} J_k(\pi)=0$。

如果我们从 $J_k(\pi)$ 过渡到 11.2.2 的意义上的 $G_k(\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_n)$，那么，这变成了：

(11:4)　对所有 $\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_n$，　$\sum_{k=1}^{n} G_k(\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_n)=0$。

而且，如果最终引入 11.2.3 的意义上的 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$，我们得到：

(11:5)　对于所有的 $\tau_1,\cdots,\tau_n$，　$\sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)=0$。

相反，条件(11.5)使得我们在 11.2.3 中定义的博弈 Γ 明显成为一个零和博弈。

---

① 转换为 11.1.1 中给出的策略定义：在这一博弈中，玩家 k 有一个且只有一个个人动作 M_k，而且这一动作独立于博弈进程。而且，他必须在没有信息的情况下做出他在 M_k 时的选择。这样，他的策略恰好就是为动作 M_k 做出一个确定的选择，不多也不少，即严格地，$\tau_k=1,\cdots,\beta_k$。

我们希望读者用分割来描述这一博弈，并将上面的描述与 11.1.3(11:A)中策略的正式定义比较。——84，①

第3章 二人零和博弈:理论

12. 准备性研究

12.1 概论

85 **12.1.1** 在上一章中,我们对一般 n 人博弈进行了全面和正式的特征化描述(见 10.1)。最后,我们还给出了一个严格的策略概念,它允许我们用一个较为简单的方案来取代非常复杂的一般方案,而且,我们还证明了前者完全等价于后者(见 11.2)。在以后的讨论中,在有些情况下,前一种形式运用起来比较方便;在有些情况下,后一种形式运用起来比较方便。因此,我们有必要给予它们专门的术语。我们将把它们分别称为同一个博弈的扩展型(extensive form)和正规型(normal form)。

由于这两种形式是严格等价的,在任何具体情况下,我们都可以合理地随意使用其中最方便的一个。我们提议尽可能利用这种可能性,因此,我们重申,我们的讨论不会因此而失去一般性。

实际中，正规型更适合一般定理的推导，而扩展型更便于具体例子的分析。也就是说，前者有利于推导所有博弈的共同性质，后者则有利于说明不同博弈的不同特征，并说明决定着这些不同特征的关键结构。（关于前者，见第 14 节和第 17 节；关于后者，见第 15 节。）

12.1.2 博弈的正式描述已经完成，我们接下来的任务是理论的建立。可以预料，为完成这一任务，我们必须遵循从较简单的博弈到较复杂的博弈的过程。因此，我们要按照复杂程度从低到高对博弈进行排序。

我们曾经按照参与者的人数对博弈进行了分类：一个具有 n 个参与者的博弈被称为 n 人博弈。我们还曾把博弈分为零和博弈与非零和博弈。因此，我们区别n 人零和博弈与一般的 n 人博弈。我们将在后面看到，一般 n 人博弈与 $(n+1)$ 人零和博弈有十分密切的联系。事实上，前者的理论将是后者的理论的一个特殊情况（见 56.2.2）。

12.2 一人博弈

12.2.1 我们从关于一人博弈的几点说明开始。在 86
正规型下，这类博弈是一个数 $\tau=1,\cdots,\beta$ 的选择。一个数被选定之后，惟一的玩家一得到的数额是 $H(\tau)$。[①] 零和博弈显然是没有意义的[②]，没有什么值得说的。与一个一般的函数 $H(\tau)$ 和“最优”或“理性”行为方式对应着的一般情况是：玩家一选择 $\tau=1,\cdots,\beta$ 使 $H(\tau)$ 最大。

---

① 见 11.2.3 末尾的 (11:D:a)，(11:D:b)。我们省去了指数 1。——86，①

② $H(\tau)=0$，见 11.4。——86，②

一人博弈的这一极端简化自然归因于这样一个事实，即变量 τ 所代表的不是（一个动作的）选择，而是玩家的策略。也就是说，它代表的是他如何应对博弈过程中可能出现的各种情况的"理论"。应该牢记，一个一人博弈也能够变得十分复杂：它可能既包含机会动作，又有这个惟一的玩家的个人动作，其中每一个动作都有很多备择，而且，在个人动作情况下，玩家能够以各种方式使用的信息量也是可变的。

12.2.2 各种各样的"佩兴斯"游戏或"单人纸牌（跳棋）"游戏中有可能出现很多此类复杂而精妙的例子。然而，也存在着这样一种重要情况，其中传统一人博弈不属于我们在这里描述的情况。不完全信息就是这类情况，即惟一的一位玩家的个人动作的先前性与预备性不等价（见 6.4）。在这种情况下，这位玩家具有两个个人动作，M_k 和 M_λ，在其中的一个动作时，他不知道有关另一个动作的选择结果。这样一种缺乏信息的状况不容易实现，在 6.4.2 中，我们讨论了如何将这位玩家"分裂"为两个或多个人，他们有着共同利益但信息传递不充分。在那里，我们看到，桥牌这类二人博弈中的一方就是这样一位玩家。构造一个与此相似的一人博弈例子并不难。不过，不幸的是，"单人纸牌"并非这类例子。[1]

这种情况出现在特定的经济结构之中：一个严格地建立起来的共产主义社会就是这样，其中，收入分配方案的结构是超越争议的（即不存在交换，只存在一种没有其他

① 现有的"双人纸牌"是两个人之间竞争的一种游戏，即二人游戏。——86，③

备择的分配），因为这样一个社会中所有社会成员的利益是完全一致的①，这一结构必须被当作一个一人博弈来对待。由于社会成员之间信息交流的不充分，任何类型的不完全信息情况都可能出现。

所以，这属于这样一种情况，借助策略（即计划）这一概念，它自然地简化成了一个最大值问题。基于我们前面的讨论，在这种情况下，而且只有在这种情况下，把经济学描述为一个简单的最大值问题——即"鲁滨孙"类型的问题——才是恰当的。

12.2.3　这些分析还表明，纯粹最大值——即"鲁滨孙"——方法的局限性。在上面的例子中，存在着一个严格地建立起来的、没有争议的分配方案。这表明，在这个层面上，对收入分配方案进行合理的和带有批判性的评价是不可能的事情。为了得到一个最大值，我们必须把整个收入分配方案置于博弈规则之中，使其绝对不可被违背，从而是超越批判的。为了将其引入到争斗和竞争——即 87
博弈策略——的层面，我们就必须分析 n 人博弈，$n \geq 2$，并且放弃这一问题的简单最大值方面。

12.3　机会和概率

12.3　在此，顺便提一下，大量"数学博弈"文献——它们主要是在 18 和 19 世纪发展起来的——基本上只研究这一问题的如下方面：博弈中的机会成分的影响。这也

① 个别成员本身不能被当作玩家来对待，因为他们之间产生冲突或其中一些人结盟的可能性被排除了。——86，④

是我们前面的讨论中遗留下来的一个问题。概率的计算，尤其是数学期望的计算的发明和恰当运用，当然是有影响的。在我们的讨论中，这些必要的运算已经出现在 11.2.3 之中了。[①][②]

因此，我们不再对这样一些博弈感兴趣，其中的数学问题只是机会的作用的评价问题，即概率和数学期望的计算问题。在概率论中，此类博弈偶尔会给出一些有意思的练习。[③] 但是，我们希望读者与我们保持一致，严格说，它们不属于博弈论。

12.4 下一个目标

12.4 接下来，我们要分析更加复杂的博弈。一般一人博弈已经得到说明，剩下的最简单博弈是二人零和博弈，从而是我们的下一个目标。

在这之后，我们有机会遇到一般的二人博弈或三人零
88 和博弈。我们将会看到，我们必须首先研究三人零和博弈。此后，我们将把这一理论扩展到 n 人零和博弈($n=1,2,3,\cdots$)。最后，我们会发现，研究一般 n 人博弈是轻而易举的事情。

---

① 我们不想贬低这些发明的重大意义。正是因为它们的巨大影响，我们才能够将我们的问题的这个方面一带而过。我们的主要兴趣在于这一问题尚未由概率论解决的那些方面。——87,①

② 关于数学期望的应用与数字效用之间的关系，见 3.7 和 3.7 之前的分析。——87,②

③ 轮盘赌一类的博弈有着更令人惊奇的特征。在轮盘赌中，玩家的数学期望显然是负的。因此，如果我们把货币报酬等同于效用，那么，参与这种博弈的动机是无法理解的。——87,③

13. 谓词演算

13.1 基本定义

13.1.1 正如我们在 12.4 中指出的那样，我们的下一个目标是二人零和博弈的详细讨论。为了充分实现这一目标，我们必须更加广泛地使用谓词演算（functional calculus）的符号，至少对于其中的一部分来说是这样。我们需要的概念是函数、变量、最大值和最小值及其作为函数运算的运用。所有这些都需要一些解释和讨论。这正是我们接下来要做的事情。

在这些解释和讨论之后，我们将证明有关最大值和最小值的一些定理，以及两者的一个特定组合，即鞍点值（saddle value）。这些定理将在二人零和博弈理论中发挥重要作用。

13.1.2 一个函数 φ 是一个依赖关系，它指明被称为 φ 的变量的 $x, y, \cdots$ 如何决定 φ 的值 u。因此，u 取决于 φ 和 $x, y, \cdots$，而且，这一依赖关系由下述符号等式表示：

$$u = \varphi(x, y, \cdots)。$$

从原理上说，我们必须区别函数 φ 本身与任意指定 $x, y, \cdots$ 时它的取值 $\varphi(x, y, \cdots)$，因为 φ 本身是一个抽象的东西。然而，在实际运用中，我们写 $\varphi(x, y, \cdots)$——$x, y, \cdots$ 待定——而不写 φ，这样做往往比较方便。［见下

面的例子(c)—(e);(a),(b)甚至更糟糕,见脚注①。]

为了描述函数 φ,我们当然要首先指定其变量 x,y,…的个数。因此,我们有一元函数 $\varphi(x)$、二元函数 $\varphi(x,y)$ 等。

下面是几个例子:

(a)算术运算 $x+1$ 和 x^2 是一个一元函数。①

(b)算术加法和乘法 $x+y$ 和 xy 是二元函数。②

(c)对任意给定的 k,9.2.4 中的 $J_k(\pi)$ 是 π 的一个一元函数。不过,它也可以被看作 k,π 的一个二元函数。

(d)对任意给定的 k,11.1.3 中(11:A)的 $\sum_k(\kappa;D_\kappa)$ 是 κ 和 D_κ 的一个二元函数。③

(e)对任意给定的 k,$H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 是$(\tau_1,\cdots,\tau_n)$的一个 n 元函数。④

89 **13.1.3** 为了描述一个函数 φ,我们同样需要指定,对于其变量 $x,y,\cdots$ 的哪些具体选择,数值 $\varphi(x,y,\cdots)$ 是完全确定的。$x,y,\cdots$ 的这些选择,即这些组合,形成 φ 的定义域。

例子(a)—(e)说明了函数的定义域多种多样:它们可以由算术或解析实体组成,也可以由别的东西组成。事

---

① 不过,我们没有将其写成上述标准形式 $\varphi(x)$,$\varphi(x,y)$。——88,①

② 同上注。——88,①

③ 像(c)中那样,我们也可以把(d)中的 κ 和(e)中的 κ 当作一个变量。——88,②

④ 同脚注①。——88,①

实上：

(a)我们可以认为，这一定义域由所有整数组成，也可以认为它由所有实数组成。

(b)(a)中使用的数组成的数对组成这一定义域。

(c)这一定义域是所有的 π 组成的集合 Ω，而 π 代表博弈 Γ 的实际博弈(见 9.1.1 和 9.2.4)。

(d)这一定义域由一个正整数 k 和一个集合 D_k 的任意配对组成。

(e)这一定义域由一系列正整数组成。

如果一个函数 φ 的变量取值正整数，我们将其称为算术函数；如果它的变量是实数，那么，它是一个数值函数；如果它的变量是集合[如(d)中的 D_k]，那么，它是一个集合函数。

这里，我们感兴趣的主要是算术函数和数值函数。

最后，我们给出关于函数的概念的一个自然结果：变量个数、定义域和函数值对变量的依赖关系共同构成一个函数，如果两个函数 φ 和 ψ 有相同的变量 $x,y,\cdots$ 和相同的定义域，而且在这一定义域中 $\varphi(x,y,\cdots)=\psi(x,y,\cdots)$，那么，$\varphi$ 和 ψ 在各个方面都完全相同。①

13.2　最大值和最小值

13.2.1　考虑一个函数 φ，它取实数值

---

①　函数的概念与集合的概念有密切联系，而且，上述分析应该与 8.2 中的分析一致。——89，①

$$\varphi(x, y, \cdots)$$

首先,我们假设 φ 是个一元函数。如果我们能够选择它的变量的一个值,如 $x = x_0$,使得 $\varphi(x_0) \geq \varphi(x')$ 对所有 x' 都成立,那么,我们说 φ 有最大值(maximum)$\varphi(x_0)$,且在 $x = x_0$ 取得这一最大值。

注意,最大值 $\varphi(x_0)$ 是惟一确定的。也就是说,φ 可能在若干个 x_0 处取得这一最大值,但它们必定都取相同的值 $\varphi(x_0)$。① 我们记这个值为 $\mathrm{Max}\ \varphi(x)$,称 $\varphi(x)$ 的最大值(maximum value)。

在上面的表述中用 $\leq$ 替换 $\geq$,我们就得到了 $\varphi(x)$ 的最小值(minimum)$\varphi(x_0)$,且它在 $x = x_0$ 处取得最小值。同样,φ 可以在若干个 x_0 处取得同一数值 $\varphi(x_0)$。我们记这一取值为 $\mathrm{Min}\ \varphi(x_0)$,称 φ 的最小值(minimum value)。

90 注意,$\mathrm{Max}\ \varphi(x)$ 和 $\mathrm{Min}\ \varphi(x)$ 的存在性都没有先验的保证。②

然而,如果 φ 的定义域由有限个元素组成,那么,$\mathrm{Max}\ \varphi(x)$ 和 $\mathrm{Min}\ \varphi(x)$ 的存在性都是显然的。实际上,我们要讨论的函数中的大多都是如此。③ 对于其余函数来说,它们的连续性和它们的定义域的几何上的有界性结合

---

① 证明:考虑两个这样的 x_0,如 x'_0,x''_0,那么,$\varphi(x'_0) \geq \varphi(x''_0)$ 且 $\varphi(x''_0) \geq \varphi(x'_0)$。故,$\varphi(x'_0) = \varphi(x''_0)$。——89,②

② 例如,如果 $\varphi(x) \equiv x$,其定义域是全体实数,那么,$\mathrm{Max}\ \varphi(x)$ 和 $\mathrm{Min}\ \varphi(x)$ 都不存在。——90,①

③ 典型例子有:11.2.3[或 13.1.2(e)]中的函数 $H_k(\tau_1, \cdots, \tau_n)$,14.1.1 中的函数 $H(\tau_1, \tau_2)$。——90,②

起来保证最大值和最小值存在。[1] 不管怎样,我们的讨论将限于最大值或最小值存在的函数。

13.2.2　下面,我们考虑有任意多个变量 $x,y,z,\cdots$ 的函数 φ。让其中一个变量如 x 变化,视其他变量为常数,我们能够将 $\varphi(x,y,z,\cdots)$ 看作变量 x 的一个一元函数。因此,像 13.2.1 中那样,我们可以针对 x 构造 $\mathrm{Max}\ \varphi(x,y,z,\cdots)$,$\mathrm{Min}\ \varphi(x,y,z,\cdots)$。

但是,由于我们可以同样地对变量 $x,y,z,\cdots$ 中的任何一个这么做,我们必须指明运算 Max 和 Min 是针对变量 x 的。为此,我们将其写为 $\mathrm{Max}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$,$\mathrm{Min}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$。这样,我们就能够把运算 Max_x,Min_x,Max_y,Min_y,Max_z,Min_z,$\cdots$ 中的任何一个运用于函数 $\varphi(x,y,z,\cdots)$。这样,它们就被区别开了,而我们的符号一点也不含糊。

对于一元函数来说,这种符号甚至更优越,而且我们将相应地使用它,即我们写 $\mathrm{Max}_x\varphi(x)$、$\mathrm{Min}_x\varphi(x)$,而不像 13.2.1 那样写 $\mathrm{Max}\ \varphi(x)$、$\mathrm{Min}\ \varphi(x)$。

有时,指明一个最大值或最小值问题的定义域 S 有方便之处,甚至是必要的。例如,当函数 $\varphi(x)$ 在 S 之外也是有定义的,但我们只希望计算 S 之内的最大值或最小值。

---

[1] 典型的例子有:17.4 中的函数 $k(\vec{\xi},\vec{\eta})$,$\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})$,$\mathrm{Min}_{\vec{\xi}}k(\vec{\xi},\vec{\eta})$,17.5.2 中的函数 $\mathrm{Min}_{\tau_2}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}$,$\mathrm{Max}_{\tau_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2}$。视以后最大值或最小值问题的建立,这些函数的变量是 $\vec{\xi}$,$\vec{\eta}$ 之一,或两者同时是变量。

另一个例子是 46.2.1,尤其是第 384 页脚注①中讨论的一个例子,其中还给出了这一问题的数学背景和参考文献。我们不必在这里对其进行深入讨论,因为上面的例子都是入门性的例子。——90,③

在这种情况下，我们写

$$\mathrm{Max}_{x\text{属于}S}\varphi(x),\ \mathrm{Min}_{x\text{属于}S}\varphi(x),$$

而不写 $\mathrm{Max}_x\varphi(x)$、$\mathrm{Min}_x\varphi(x)$。

在特定情况下，枚举 $\varphi(x)$ 的取值，如 $a,b,\cdots$，可能比将其表达为一个函数更为简单。这时，我们可以写
91 $\mathrm{Max}(a,b,\cdots)$，$[\mathrm{Min}(a,b,\cdots)]$，而不写成 $\mathrm{Max}_x\varphi(x)$，$[\mathrm{Min}_x\varphi(x)]$。①

13.2.3 注意，虽然 $\varphi(x,y,z,\cdots)$ 是变量 $x,y,z,\cdots$ 的一个函数，$\mathrm{Max}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$ 和 $\mathrm{Min}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$ 也是函数，只不过是变量 $y,z,\cdots$ 的函数。表面上，x 仍旧出现在 $\mathrm{Max}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$ 和 $\mathrm{Min}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$ 之中，不过它不再是这些函数的变量。我们说，运算 Max_x、Min_x 扼杀了作为一个指数出现的变量 x。②

由于 $\mathrm{Max}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$ 和 $\mathrm{Min}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$ 仍然是变量 $y,z,\cdots$ 的函数③，我们能够继续下去并建立下面的表达式：

$$\mathrm{Max}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y,z,\cdots),\qquad \mathrm{Max}_y\mathrm{Min}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$$

$$\mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y,z,\cdots),\qquad \mathrm{Min}_y\mathrm{Min}_x\varphi(x,y,z,\cdots)$$

同样，我们也可以建立

$$\mathrm{Max}_x\mathrm{Max}_y\varphi(x,y,z,\cdots),\qquad \mathrm{Min}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y,z,\cdots)$$

---

① $\mathrm{Max}(a,b,\cdots,)$ $[\mathrm{Min}(a,b,\cdots)]$ 自然是数 $a,b,\cdots$ 中的最大（最小）者。——91，①

② 数学分析中，扼杀一个变量 x 的一个众所周知的运算是定积分：$\varphi(x)$ 是 x 的一个函数，但 $\int_0^1\varphi(x)dx$ 是一个常数。——91，②

③ 在 13.2.2 中我们把 $y,z,\cdots$ 当作常数。但是，现在变量 x 已经被扼杀，我们释放变量 $y,z,\cdots$。——91，③

等;[①]对于其中任意两个变量,我们都可以这么做,而且上述过程可以推广到两个以上的变量。

最后,经过与变量个数一样多个数的运算 Max 或 Min——以任意顺序和结合方式,但每一个变量一次,我们得到一个根本没有变量的函数,即一个常数。

13.3　交换性

13.3.1　13.2.3 的讨论使我们能够把 Max_x, Min_x, Max_y, Min_y, Max_z, Min_z, …完全当作函数来运算,其中的每一个把一个函数变成另一个函数。[②] 我们已经看到,我们能够依次施加它们之中的若干个。在这种情况下,以什么样的顺序施加这些运算表面上看也是有所不同的。

有真正的不同吗?严格说:如果将两个运算依次施加于同一对象,而它们的顺序是无所谓的,那么,我们称这两个运算是可交换的。现在,我们的问题是,运算 Max_x, Min_x, Max_y, Min_y, Max_z, Min_z, …是否都是可交换的呢?

让我们来回答这一问题。为此,我们只需两个变量, 92
如 x 和 y,而且 φ 不必是 x、y 之外更多变量的函数。[③]

所以,我们考虑一个二元函数 $\varphi(x,y)$。显然,有意义的可交换性问题是下列等式中哪一个是一般地成立的:

(13:1)　　$\mathrm{Max}_x \mathrm{Max}_y \varphi(x,y) = \mathrm{Max}_y \mathrm{Max}_x \varphi(x,y)$,

---

① 注意,如果我们施加两个或更多运算,最里面那个首先得到执行并扼杀其变量。然后是下一个,依此类推。——91,④

② 每次减少一个变量,因为这些运算中的每一个扼杀一个变量。——91,⑤

③ 为了我们现在的目的,φ 的更多变量,如果有的话,可以被当作常数对待。——91,⑥

$$(13:2)\qquad \mathrm{Min}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y)=\mathrm{Min}_y\mathrm{Min}_x\varphi(x,y),$$

$$(13:3)\qquad \mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y)=\mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)。$$①

我们将看到,(13:1)和(13:2)是正确的,而(13:3)不正确。也就是说,任意两个 Max 或任意两个 Min 可交换,而一个 Max 与一个 Min 一般来说不可交换。我们还将得出一个准则以确定在什么情况下 Max 与 Min 可交换。

Max 与 Min 的交换性对于二人零和博弈来说具有决定性意义(见 14.4.2 和 17.6)。

13.3.2 我们首先考虑(13:1)。直觉上,如果把 x,y 当作一个变量,$\mathrm{Max}_x\mathrm{Max}_y\varphi(x,y)$ 显然是函数 $\varphi(x,y)$ 的最大值。也就是说,对某个适当的 x_0,y_0,$\varphi(x_0,y_0)=\mathrm{Max}_x\mathrm{Max}_y\varphi(x,y)$ 且对于所有 x',y',$\varphi(x_0,y_0)\geqq\varphi(x',y')$。

如果需要一个数学证明的话,那么:选择 x_0,使得 $\mathrm{Max}_y\varphi(x,y)$ 在 $x=x_0$ 时取得最大值,然后选择 y_0,使得 $\varphi(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 时取得最大值。那么,

$$\varphi(x_0,y_0)=\mathrm{Max}_y\varphi(x_0,y)=\mathrm{Max}_x\mathrm{Max}_y\varphi(x,y),$$

而且对于所有 x',y'

$$\varphi(x_0,y_0)=\mathrm{Max}_y\varphi(x_0,y)\geqq\mathrm{Max}_y\varphi(x',y)\geqq\varphi(x',y')。$$

证明完成。

我们看到,如果我们把 x,y 看作一个变量,通过交换 x、y,$\mathrm{Max}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)$ 同样是 $\varphi(x,y)$ 的最大值。

因此,(13:1)的两边具有相同的特性,从而它们是相等的。这就证明了(13:1)。

---

① $\mathrm{Min}_x\mathrm{Max}_y$ 这个组合不需要单独处理,因为它可以通过交换 x、y 从而得到 $\mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y$。——92,①

在上面的讨论中,只需用 Min 替换 Max,用≦替换≧,(13:2)就得到了证明。

把 x,y 当作一个变量,这一方法偶尔相当方便。像 18.2.1 那样,用 $\tau_1,\tau_2,H(\tau_1,\tau_2)$ 取代这里的 $x,y,\varphi(x,y)$,当我们使用它时,我们将写成 $\text{Max}_{x,y}\varphi(x,y)$,$\text{Min}_{x,y}\varphi(x,y)$。

13.3.3　这里,图形讨论也许是有益的。假设 φ 就 x,y 的定义域是一个有限集。为简单起见,记 x(在这一定义域中)的可能取值为 $1,\cdots,t$,y 的可能取值为 $1,\cdots,s$。那么,对应于这一定义域中的 x,y——即 $x=1,\cdots,t,y=1,\cdots,s$ 的所有组合,函数 $\varphi(x,y)$ 的取值能够被排列在一个矩形图中:我们用一个 t 行和 s 列的矩形图,用数 $x=$ 93
$1,\cdots,t$ 记行,用数 $y=1,\cdots,s$ 记列。在对应着第 x 行与第 y 列的地方,我们写上函数取值 $\varphi(x,y)$,见图 11。这一排列完全描述了函数 $\varphi(x,y)$,而这一排列正是数学中的矩阵。函数的具体取值 $\varphi(x,y)$ 是该矩阵的元素。

	1	2	………	y	………	s
1	$\varphi(1,1)$	$\varphi(1,2)$	………	$\varphi(1,y)$	………	$\varphi(1,s)$
2	$\varphi(2,1)$	$\varphi(2,2)$	………	$\varphi(2,y)$	………	$\varphi(2,s)$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
x	$\varphi(x,1)$	$\varphi(x,2)$	………	$\varphi(x,y)$	………	$\varphi(x,s)$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
t	$\varphi(t,1)$	$\varphi(t,2)$	………	$\varphi(t,y)$	………	$\varphi(t,s)$

图 11

现在，$\mathrm{Max}_y\varphi(x,y)$ 是第 x 行中的 $\varphi(x,y)$ 的最大值。

$$\mathrm{Max}_x\mathrm{Max}_y\varphi(x,y)$$

是行最大值的最大值。另一方面，

$$\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)$$

是第 y 列的最大值。因此，$\mathrm{Max}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)$ 是列最大值的最大值。从而，我们在 13.3.2 中关于（13:1）的断言能够被表述为：行最大值的最大值与列最大值的最大值相同，两者都是 $\varphi(x,y)$ 在这一矩阵中的最大值。如果用 Min 替换 Max，我们可以类似得到关于（13:2）的断言。

13.4 混合情况：鞍点

13.4.1 下面，我们讨论（13:3）。用 13.3.3 中的术语说，（13:3）的左边是行最小值的最大值，右边是列最大值的最小值。这两个数既不是绝对的最大值，也不是绝对的最小值，而且没有先验的证据说明它们应该是
94 相同的。它们也的确不相等。图 12 和图 13 分别给出了这两者不相等的两个函数。图 14 是这两者相等的函数。（所有这些图都应该在 13.3.3 和图 11 的意义上来阅读。）

这些图以及 Max 和 Min 的交换性将在二人零和博弈理论中发挥基本的作用。事实上，我们将会看到，它们就代表着特定的博弈，这些博弈是具有一定重要性的一类博弈（见 18.1.2）。不过，这里，我们只讨论这些图形以及 Max 和 Min 的交换性，不提它们的应用。

$t = s = 2$

	1	2	行最小值
1	1	-1	-1
2	-1	1	-1
列最大值	1	1	

行最小值的最大值 = -1

列最大值的最小值 = 1

图 12

$t = s = 3$

	1	2	3	行最小值
1	0	-1	1	-1
2	1	0	-1	-1
3	-1	1	0	-1
列最大值	1	1	1	

行最小值的最大值 = -1

列最大值的最小值 = 1

图 13

$t = s = 2$

	1	2	行最小值
1	-2	1	-2
2	-1	2	-1
列最大值	-1	2	

行最小值的最大值 = -1

列最大值的最小值 = -1

图 14

13.4.2　(13:3)既不总是正确,又不总是错误,因此,它的两边:

(13:4) $\mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y)$, $\mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)$

之间的关系需要更加充分的讨论。图 14 在一定程度上说明了(13:3),对其可能有的表现,提供了一些线索。尤其是:

(13:A) 在这三个图中,(13:3)的左边[即(13:4)的第一个表达式]总是≤(13:3)的右边[即(13:4)的第二个表达式]。

95 (13:B) 在图 14 中,(13:3)是成立的。在该矩阵中存在一个同时是行的最小值和列的最大值的地方。(这正好发生在该矩阵的左下角,相应的元素是 -1。)在(13:3)不成立的图 12 和图 13 中,则不存在这样的地方。

为了恰当地描述(13:B)中提到的情况,我们引入一个新的概念。因此,我们定义:

令 $\varphi(x,y)$ 是一个二元函数,我们称 x_0, y_0 是 φ 的一个鞍点,如果 $\varphi(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 取得其最大值,与此同时 $\varphi(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 取得其最小值。

鞍点这一名称的由来是:把所有元素 x,y($x=1,\cdots,t$,$y=1,\cdots,s$;图 11)的矩阵想像为一张地形图,x,y 处山的高度是此处的函数值 $\varphi(x,y)$,那么,鞍点 x_0,y_0 处的地貌基本上像一个马鞍或山坳通道,第 x_0 行是山脊,第 y_0 列是(从一个山谷到另一个山谷的)通道,它正好穿过这个山脊。

13.5.2 中的(13:C*)也符合这一解释。①

---

① 所有这些密切联系着某些更一般的有关极值问题的数学理论和变分法等。见莫尔斯(M. Morse):"函数的临界点和大范围变分法",*Bull. Am. Math. Society*, Jan—Feb. 1929, pp. 38 cont.,"什么是大范围解析?",*Am. Math. Monthly*, Vol. XLIX, 1942, pp. 358 cont。——95,①

13.4.3 图 12 和图 13 表明，一个函数 φ 完全可以没有鞍点。另一方面，一个函数 φ 有多个鞍点也是可以理解的。不过，所有的鞍点 x_0, y_0，如果存在的话，必定有相同的函数值 $\varphi(x_0, y_0)$。[①] 如果这个值存在的话，我们将其记为 $\mathrm{Sa}_{x/y}\varphi(x,y)$，称之为 $\varphi(x,y)$ 的鞍点值。[②]

现在，我们把（13：A）和（13：B）所指内容推广为定理。我们将其记为（13：A*）和（13：B*）并强调它们对于所有函数 $\varphi(x,y)$ 都成立。

（13：A*）　$\mathrm{Max}_x \mathrm{Min}_y \varphi(x,y) \leqq \mathrm{Min}_y \mathrm{Max}_x$ 总是成立。

（13：B*）　$\mathrm{Max}_x \mathrm{Min}_y \varphi(x,y) = \mathrm{Min}_y \mathrm{Max}_x$ 成立，当且仅当 φ 的鞍点 x_0, y_0 存在。

13.5 主要结果的证明

13.5.1 首先，对每一个函数 $\varphi(x,y)$，我们定义两个集合 A^φ, B^φ。$\mathrm{Min}_y \varphi(x,y)$ 是 x 的一个函数；令 A^φ 是这样一 96
些 x_0 组成的集合，该函数在 $x = x_0$ 处取得其最大值。$\mathrm{Max}_x \varphi(x,y)$ 是 y 的一个函数，令 B^φ 是这样的 y_0 组成的集合，该函数在 $y = y_0$ 处取得其最小值。

接下来，我们证明（13：A*），（13：B*）。

---

① 这是 13.5.2 中（13：C*）的结果。一个同样简单的证明是：考虑两个鞍点 x_0, y_0，如 x'_0, y'_0, x''_0, y''_0。那么：

$$\varphi(x'_0, y'_0) = \mathrm{Max}_x \varphi(x, y'_0) \geqq \varphi(x''_0, y'_0) \geqq \mathrm{Min}_y \varphi(x''_0, y) = \varphi(x''_0, y''_0),$$

即：$\varphi(x'_0, y'_0) \geqq \varphi(x''_0, y''_0)$。类似地，$\varphi(x''_0, y''_0) \geqq \varphi(x'_0, y'_0)$。
故 $\varphi(x'_0, y'_0) = \varphi(x''_0, y''_0)$。——95，②

② 显然，运算 $\mathrm{Sa}_{x/y}\varphi(x,y)$ 扼杀变量 x, y。见 13.2.3。——95，③

(13:A*)的证明:选择 A^{φ} 中的 x_0 和 B^{φ} 中的 y_0,那么,

$$\begin{aligned}\mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y) &= \mathrm{Min}_y\varphi(x_0,y) \leqq \varphi(x_0,y_0)\\ &\leqq \mathrm{Max}_x\varphi(x,y_0) = \mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y),\end{aligned}$$

即如我们希望的那样: $\mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y) \leqq \mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)$。

(13:B*)中一个鞍点存在的必要条件的证明:

假设

$$\mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y) = \mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)。$$

在 A^{φ} 中选择 x_0,在 B^{φ} 中选择 y_0,那么,我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Max}_x\varphi(x,y_0) &= \mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)\\ &= \mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y) = \mathrm{Min}_y\varphi(x_0,y)。\end{aligned}$$

因此,对每一个 x',

$$\varphi(x',y_0) \leqq \mathrm{Max}_x\varphi(x,y_0) = \mathrm{Min}_y\varphi(x_0,y) \leqq \varphi(x_0,y_0),$$

即 $\varphi(x_0,y_0) \geqq \varphi(x',y_0)$,故 $\varphi(x,y_0)$ 在 $x = x_0$ 时取得其最大值。

对每一个 y',

$$\varphi(x_0,y') \geqq \mathrm{Min}_y\varphi(x_0,y) = \mathrm{Max}_x\varphi(x,y_0) \geqq \varphi(x_0,y_0),$$

即 $\varphi(x_0,y_0) \leqq \varphi(x_0,y')$,故 $\varphi(x_0,y)$ 在 $y = y_0$ 时取得其最小值。

所以,x_0,y_0 是一个鞍点。

(13:B*)中一个鞍点存在的充分条件的证明:设 x_0,y_0 是一个鞍点。那么,

$$\mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y) \geqq \mathrm{Min}_y\varphi(x_0,y) = \varphi(x_0,y_0),$$

$$\mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y) \leqq \mathrm{Max}_x\varphi(x,y_0) = \varphi(x_0,y_0),$$

故,

$$\mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y) \geqq \varphi(x_0,y_0) \geqq \mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)。$$

结合(13:A^*)得

$$\mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0) = \mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)。$$

13.5.2　13.5.1 中的分析给出了一些值得进一步讨论的结果。现在，我们假设鞍点存在，即等式(13:B^*)成立。

对于每一个鞍点 x_0,y_0

(13:C^*)　　$\varphi(x_0,y_0) = \mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y) = \mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)$

证明：这正是 13.5.1 中(13:B^*)的充分条件证明中的最后一个等式。

(13:D^*)　　x_0,y_0 是一个鞍点，当且仅当 x_0 属于 A^φ 且 y_0 97
属于 B^φ。①

充分条件的证明：设 x_0 属于 A^φ 且 y_0 属于 B^φ。那么，13.5.1中(13:B^*)的必要条件的证明表明，x_0,y_0 是一个鞍点。

必要条件的证明：设 x_0,y_0 是一个鞍点。根据(13:C^*)，对于每一个 x'，

$$\mathrm{Min}_y\varphi(x',y) \leqq \mathrm{Max}_x\mathrm{Min}_y\varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0) = \mathrm{Min}_y\varphi(x_0,y),$$

即 $\mathrm{Min}_y\varphi(x_0,y) \geqq \mathrm{Min}_y\varphi(x',y)$，故 $\mathrm{Min}_y\varphi(x,y)$ 在 $x = x_0$ 取得其最大值。所以，x_0 属于 A^φ。类似，对于每一个 y'，

$$\mathrm{Max}_x\varphi(x,y') \geqq \mathrm{Min}_y\mathrm{Max}_x\varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0) = \mathrm{Max}_x\varphi(x,y_0),$$

即 $\mathrm{Max}_x\varphi(x,y_0) \leqq \mathrm{Max}_x\varphi(x,y')$，故 $\mathrm{Max}_x\varphi(x,y)$ 在 $y = y_0$

---

① 只是在本节开头的假设条件下！不然的话，根本不存在鞍点。——97,①

取得其最小值。所以，y_0 属于 B^{φ}。证明完成。

定理（13:C*）和（13:D*）还指出了 13.4.2 末尾给出的比喻的有限性，即这两个定理表明，我们的鞍点概念是一个比日常（地形图）的鞍点或山坳通道更狭隘的概念。事实上，（13:C*）指出，如果存在的话，所有鞍点具有同样的海拔高度。（13:D*）表明，如果我们把集合 A^{φ}、B^{φ} 描述为两个数字区间①，那么，所有鞍点合在一起形成一个矩形平原。②

13.5.3 作为本节的结束，我们要证明，对于一类特殊的 x,y 和 $\varphi(x,y)$，一个鞍点的存在性。我们将会看到，这一特殊情况并非完全没有一般性。设变量 x,u 的一个函数 $\psi(x,u)$ 被给定。我们考虑所有的函数 $f(x)$，其取值落入 u 的值域之中。现在，我们保持变量 x，但用函数 f 自身替换变量 u。③ 表达式 $\psi[x,f(x)]$ 决定于 x,f；因此，我们可以把 $\psi[x,f(x)]$ 当作变量 x,f 的函数且用它取代 $\varphi(x,y)$。

我们要证明的是，对于 x,f 和 $\psi[x,f(x)]$——用它们替换 x,y 和 $\varphi(x,y)$——一个鞍点存在。也就是说，

（13:E） $\quad \mathrm{Max}_x \mathrm{Min}_f \psi[x,f(x)] = \mathrm{Min}_f \mathrm{Max}_x \psi[x,f(x)]$。

证明：对于每个 x，选择一个 u_0，使 $\psi(x,u_0) = \mathrm{Min}_u \psi(x,u)$。这个 u_0 依赖于 x，因此我们能够用 $u_0 = f_0(x)$ 定义一个函数 f_0。从而，$\psi[x,f_0(x)] = \mathrm{Min}_u \psi(x,u)$。所以

---

① 如果 x、y 是正整数，那么，通过它们的值域的两个适当排列，这是肯定能够做到的。——97，②

② 第 95 页脚注①中间接提到的一般数学概念没有这些局限性。它们严格对应着日常生活中的山坳通道概念。——97，③

③ 请读者想像一下：虽然 f 本身是一个函数，f 完全可以是另一个函数的变量。——97，④

$$\text{Max}_x\psi[x,f_0(x)] = \text{Max}_x\text{Min}_u\psi(x,u)。$$

更有， 98

(13:F)　　$\text{Min}_f\text{Max}_x\psi[x,f(x)] \leqq \text{Max}_x\text{Min}_u\psi(x,u)$。

现在，$\text{Min}_f\psi[x,f(x)]$与$\text{Min}_u\psi(x,u)$相同，因为f仅仅通过它在x处的取值$f(x)$进入这一表达式。所以，$\text{Min}_f\psi[x,f(x)] = \text{Max}_x\text{Min}_u\psi(x,u)$，且相应地，

(13:G)　　$\text{Max}_x\text{Min}_f\psi[x,f(x)] = \text{Max}_x\text{Min}_u\psi(x,u)$。

(13:F)和(13:G)合起来保证(13:E)中$\geqq$的成立。(13:E)中$\leqq$的成立则归因于(13:A*)。所以，我们有(13:E)中的=成立，即定理得证。

14. 严格决定的博弈

14.1　问题描述

14.1.1　下面，我们讨论二人零和博弈，并且从其正规型开始。

这种博弈由两个动作组成：玩家 1 选择一个数$\tau_1 = 1,\cdots,\beta_1$，玩家 2 选择一个数$\tau_2 = 1,\cdots,\beta_2$，每一选择都是在对其他选择一无所知的情况下做出的，玩家 1 和玩家 2 得到的数额分别是$H_1(\tau_1,\tau_2)$，$H_2(\tau_1,\tau_2)$。[①]

由于这一博弈是零和博弈，由 11.4，我们有

$$H_1(\tau_1,\tau_2) + H_2(\tau_1,\tau_2) \equiv 0。$$

① 见 11.2.3。——98，①

我们更倾向于将其写为

$$H_1(\tau_1,\tau_2)\equiv H(\tau_1,\tau_2),\quad H_2(\tau_1,\tau_2)\equiv -H(\tau_1,\tau_2)。$$

接下来，我们试图理解玩家1和玩家2的意愿如何决定事态的发展，即选择 τ_1,τ_2。

我们必须再次提醒读者，τ_1,τ_2 代表的是对玩家的策略的最终分析，而不是对(一个动作)选择的最终分析，而策略是玩家关于这一博弈的“理论”或“计划”。

此刻，我们暂且将其搁置一旁。后面，我们将深入 τ_1，τ_2 的“背后”，分析一局博弈的进程。

14.1.2 玩家1和玩家2的愿望很简单。玩家1希望使 $H_1(\tau_1,\tau_2)\equiv H(\tau_1,\tau_2)$ 最大，玩家2希望 $H_2(\tau_1,\tau_2)\equiv -H(\tau_1,\tau_2)$ 最大。也就是说，玩家1要最大化 $H(\tau_1,\tau_2)$，而玩家2要最小化 $H(\tau_1,\tau_2)$。

如此，两个玩家的利益集中于同一对象：函数 $H(\tau_1,\tau_2)$。不过，二人零和博弈中一件预料之中的事情是，他们的企图正好相反：玩家1想最大化，而玩家2想最小化。这里的困难在于两位玩家之中的任何一位都不完全控制其努力的目标——$H(\tau_1,\tau_2)$，即不同时控制其两个变量 τ_1,τ_2。玩家1想最大化，但是，他只控制着 τ_1；玩家2想最小化，但是，他只控制着 τ_2。最后的结果是什么呢？

99 困难还在于，τ_1 和 τ_2 之一的具体选择未必使 $H(\tau_1,\tau_2)$ 大或小。一般来说，τ_1 对 $H(\tau_1,\tau_2)$ 的影响是不确定的。两者结合起来才能决定 $H(\tau_1,\tau_2)$(见2.2.3经济学中相应的困难)。

要看到，从选择变量 τ_1 的玩家1的角度看，变量 τ_2 肯定不能被当作一个随机事件。变量 τ_2 将依赖于另一个玩

家的愿望，在玩家 1 的考虑中，它必须像玩家 1 本人的"理性"那样同等对待（见 2.2.3 和 2.2.4）。

14.1.3 这里，运用 13.3.3 中发展的图形表示会带来方便。如图 15 所示，我们用一个矩阵表示 $H(\tau_1,\tau_2)$：我们建立一个 β_1 行和 β_2 列的矩阵，用数字 $\tau_1=1,\cdots,\beta_1$ 记行，用数字 τ_2 记列。我们在 τ_1,τ_2 处写上矩阵的元素 $H(\tau_1,\tau_2)$。（见 13.3.3 图 11。那里的 φ、x、y、t、s 分别对应着这里的 H、τ_1、τ_2、β_1、β_2。）

	1	2	………	τ_2	………	β_2
1	$\mathscr{H}(1,1)$	$\mathscr{H}(1,2)$	………	$\mathscr{H}(1,\tau_2)$	………	$\mathscr{H}(1,\beta_2)$
2	$\mathscr{H}(2,1)$	$\mathscr{H}(2,2)$	………	$\mathscr{H}(2,\tau_2)$	………	$\mathscr{H}(2,\beta_2)$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
τ_1	$\mathscr{H}(\tau_1,1)$	$\mathscr{H}(\tau_1,2)$	………	$\mathscr{H}(\tau_1,\tau_2)$	………	$\mathscr{H}(\tau_1,\beta_2)$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
β_1	$\mathscr{H}(\beta_1,1)$	$\mathscr{H}(\beta_1,2)$	………	$\mathscr{H}(\beta_1,\tau_2)$	………	$\mathscr{H}(\beta_1,\beta_2)$

图 15

应该理解，函数 $H(\tau_1,\tau_2)$ 不受任何约束，即我们可以按照自己的意愿自由选择。① 事实上，任意给定的一个函

① 当然了，定义域必须事先确定：它由所有数对 τ_1,τ_2，$\tau_1=1,\cdots,\beta_1$，$\tau_2=1,\cdots,\beta_2$ 组成。这是一个有限集，因此 Max 和 Min 总存在。见 13.2.1 末尾。——99，①

数 $H(\tau_1,\tau_2)$ 界定一个 11.2.3 的(11:D)意义上的二人零和博弈，其简单定义是

$$H_1(\tau_1,\tau_2)\equiv H(\tau_1,\tau_2),H_2(\tau_1,\tau_2)\equiv -H(\tau_1,\tau_2)$$

(见 14.1.1)。正如上一节描述的那样，我们能够以如下
100 方式理解玩家 1 和玩家 2：他们都只对矩阵元素 $H(\tau_1,\tau_2)$ 的取值感兴趣。玩家 1 试图将其最大化，但他只控制着行，即数 τ_1；玩家 2 试图将其最小化，但他只控制着列，即数 τ_2。

我们必须为这场奇特的拔河比赛的结果找到一个令人满意的解释。①

14.2 小博弈和大博弈

14.2 我们不直接向博弈 Γ 本身发起进攻，因为我们还没有做好足够的准备。让我们考虑另外两个博弈，这两个博弈与 Γ 有密切联系，且关于它们的讨论是手到擒来的事情。

显然，分析 Γ 时的困难是，玩家 1 在选择 τ_1 时不知道他所面对的玩家 2 的选择 τ_2 是什么，反之亦然。因此，我们将 Γ 与没有这一困难的其他博弈进行比较。

首先，我们定义一个博弈 Γ_1，它与 Γ 的惟一区别是，在玩家 2 做出选择 τ_2 之前，玩家 1 必须做出选择 τ_1，而

---

① 这并非真的是一场拔河比赛。这两位玩家有着相反的利益，但是，他们用于改善自己处境的手段却不是相互对立的。相反，这些"手段"——即 τ_1,τ_2 的选择——显然是相互独立的。这一差异描述这整个问题。——100，①

且，玩家 2 在做出选择时充分知道玩家 1 赋予 τ_1 的值（即 1 的动作是 2 的动作的预备）。[①] 在博弈 Γ_1 中，与 Γ 相比，玩家 1 显然处于不利的境地。因此，我们称 Γ_1 为 Γ 的小博弈。

类似地，我们定义第二个博弈 Γ_2，它与 Γ 的惟一区别在于，在玩家 1 做出 τ_1 的选择之前，玩家 2 必须做出他的选择 τ_2，且玩家 1 是在充分知道玩家 2 赋予 τ_2 的值的情况下做出他的选择（即 2 的动作是 1 的动作的预备）。[②] 与原来的博弈 Γ 相比，在 Γ_2 中，玩家 1 显然处于较有利的地位。因此，我们称 Γ_2 是博弈 Γ 的大博弈。

引入 Γ_1、Γ_2 的意义在于：根据常识，对于 Γ_1、Γ_2 来说，“最优玩法”——即理性行为的概念——有着明显的意义。我们将对此进行严格讨论。另一方面，博弈 Γ 显然介于博弈 Γ_1 与博弈 Γ_2 之间。例如，从玩家 1 的角度看，Γ_1 劣于 Γ 且 Γ_2 优于 Γ。[③] 因此，我们可以预计，Γ_1、Γ_2 将分别为 Γ 中有意义的量提供下界和上界。当然，我们将以严格的形式讨论所有这些。最后，这些“界”能够有很大差距，并给有关 Γ 的理解留下相当大的不确定性。事实上，表面上，对于很多博弈来说，情况都是这样。但是，通过引入其他工具，我们将成功地运用这一技术，最终得到有关 Γ 的 101
一个严格理论，给所有问题提供完美的答案。

---

① 因此，Γ_1 十分简单，不再有正规型。——100，②

② 因此，Γ_2 极为简单，不再有正规型。——100，③

③ 当然了，为严格起见，我们应该说“劣于或等于”而不是“劣于”，“优于或等于”而不是“优于”。——100，④

14.3 辅助博弈

14.3.1 让我们首先考虑小博弈 Γ_1。在玩家 1 做出他的选择 τ_1 之后，玩家 2 在充分知道 τ_1 的取值的情况下做出其选择 τ_2。由于玩家 2 欲最小化 $H(\tau_1,\tau_2)$，可以肯定的是，对于这个 τ_1，他将选择 τ_2 使 $H(\tau_1,\tau_2)$ 最小。换句话说：当玩家 1 选择 τ_1 的一个具体值时，他能够肯定地预见 $H(\tau_1,\tau_2)$ 将是什么。这个值将是 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$。[①] 这是 τ_1 的一个函数。现在，玩家 1 希望最大化 $H(\tau_1,\tau_2)$，由于他的 τ_1 选择导致 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$，而 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$ 仅仅依赖于 τ_1，不依赖于 τ_2，因此玩家 1 将选择 τ_1 使 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$ 最大化。因此，这个量的最终取值是

$$\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)。$$[②]

总之：

(14:A:a) 对于玩家 1 来说，小博弈 Γ_1 的好的方法（策略）是选择属于集合 A 的 τ_1，而 A 是这样的 τ_1 的组成集合，对于这些 τ_1，$\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$ 取其最大值 $\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$。

(14:A:b) 对于玩家 2 来说，好的玩法（策略）是：

---

① 注意，τ_2 可能不具有惟一性：对于 τ_1，τ_2 的一个给定函数 $H(\tau-1,\tau_2)$ 可能在若干个 τ_2 值取得其最小值。不过，对于所有这些 τ_2 的值来说，$H(\tau_1,\tau_2)$ 的值将是相同的，即惟一地界定的最小值 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$（见 13.2.1）。——101，①

② 与脚注①同理，τ_1 的值也可能不是惟一的，但对于问题中所有 τ_1，$\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)$ 的值是相同的，即惟一地界定了最大值——101，②

$$\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)。$$

如果玩家 1 已经选定 τ_1 的值①，那么，τ_2 应该被选得属于集合 B_{τ_1}，B_{τ_1} 是这样的 τ_2 的集合，对于这些 τ_2，$H(\tau_1, \tau_2)$ 取其最小值 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1, \tau_2)$。②

基于此，我们能够进一步说：

(14:A:c)　如果玩家 1 和玩家 2 都正确地玩小博弈 Γ_1，即如果 τ_1 属于 A 且 τ_2 属于 B_{τ_1}，那么，$H(\tau_1, \tau_2)$ 的值将等于

$$v_1 = \mathrm{Max}_{\tau_1} \mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1, \tau_2)。$$

从数学意义上说，通过回忆集合 A 和 B_{τ_1} 的定义并在上述结论中进行相应替换，上述结论就可以直接得到证明。我们将此作为练习留给读者。这只不过是“套用已经有定义”的经典运算。而且，根据常识，这种说法应该是清楚的。 102

整个讨论应该弄清楚的是，对于每一位玩家，博弈 Γ_1 的每次博弈有一个确定的值。对于玩家 1 来说，这个值就是上述 v_1，从而对于玩家 2 来说它是 $-v_1$。

关于 v_1 的意义，我们有如下较为详细的分析：

(14:A:d)　无论玩家 2 如何玩，玩家 1 总能够通过恰当的玩法确保自己的收益 $\geqq v_1$；无论玩家 1 如何玩，玩家 2 总能够通过恰当的玩法确保自己的收益 $\geqq -v_1$。

---

① 轮到玩家 2 做出他的选择 τ_2 时，他被告知 τ_1 的值。这是 Γ_1 规则。根据策略的概念（见 4.1.2 和 11.1.1 末尾），此刻，无论玩家 1 已经做出的选择好坏，即无论选取的值是否属于 A。——101，③

② 总之，这个 τ_1 被当作一个已知参数，一切都依赖于它，包括应该从中选择 τ_2 的集合 B_{τ_1}。——101，④

（证明：选择 A 中任何一个 τ_1 都能够得到前者。选择 B_{τ_1} 中任何一个 τ_2 则能够得到后者。[①] 我们也将其中的细节留给读者，它们并不困难。）

从而，上述说法能够被等价地表述为：

(14:A:e) 无论玩家 1 如何玩，玩家 2 总能够通过恰当的玩法确保玩家 1 的收益 $\leq v_1$，即防止玩家 1 的收益 $> v_1$；无论玩家 2 如何玩，玩家 1 则总能够通过恰当的玩法确保玩家 2 的收益 $\leq -v_1$，即防止玩家 2 的收益 $> -v_1$。

14.3.2 我们关于 Γ_1 的讨论已经相当丰富而详细，尽管其“解”相当明显。也就是说，只要对此情形有清楚的认识，任何人都能够凭借常识而不用数学得出相同的结论。然而，我们却认为，对这种情况进行如此详细的讨论是必要的，因为它是其他若干很不容易进行非数学讨论的情况的原型。还有，所有基本复杂因素以及克服它们的办法也都在这一最简单的情况中出现了。通过从各个角度认清它们，在后面较复杂的情况中，它们将可能浮现在我们的脑海中。还有可能的是，仅仅凭借这种方式准确判断每一具体方法能够给出什么结果。

14.3.3 下面，我们讨论大博弈 Γ_2。

Γ_2 与 Γ_1 的不同仅在于玩家 1 与玩家 2 的角色对换了：现在，玩家 2 必须首先做出他的选择 τ_2，然后玩家 1 在

---

① τ_1 必须在不知道 τ_2 的情况下被选定，而 τ_2 是在充分知道 τ_1 的情况下被选定。——102，①

充分知道 τ_2 的值的情况下做出他的选择 τ_1。

但是，在说到 Γ_2 产生于 Γ_1 中玩家 1 与玩家 2 对换角色时，我们必须牢记，在这一过程中，他们保留各自的函数 $H_1(\tau_1,\tau_2)$，$H_2(\tau_1,\tau_2)$，即 $H(\tau_1,\tau_2)$，$-H(\tau_1,\tau_2)$。也就是说，玩家 1 仍旧想使 $H(\tau_1,\tau_2)$ 最大化，而玩家 2 仍旧想使 $H(\tau_1,\tau_2)$ 最小化。 103

理解了这些，我们就能够将 14.3.1 的讨论的逐字重复留给读者了。我们的讨论仅限于以适合 Γ_2 的形式重述有意义的定义。

(14:B:a)　　玩家 2 玩大博弈 Γ_2 的好的玩法（策略）是选择属于集合 B 的 τ_2，其中 B 是这样的 τ_2 的集合，对于这些 τ_2，$H(\tau_1,\tau_2)$ 取其最小值 $\mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)$。

(14:B:b)　　玩家 1 的好的玩法（策略）是：如果玩家 2 已经选定了 τ_2 的一个值①，那么，τ_1 应被选得属于集合 A_{τ_2}，这里 A_{τ_2} 是这样的 τ_1 的集合，对于这些 τ_1，$H(\tau_1,\tau_2)$ 取其最大值 $\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)$。②

由此，我们能够进一步说：

(14:B:c)　　如果玩家 1 和玩家 2 都正确地玩大博弈 Γ_2，即如果 τ_2 属于 B 且 τ_1 属于 A_{τ_2}，那

① 当轮到玩家 1 做出其选择 τ_1 时，他被告知 τ_2 的值，这是博弈 Γ_2 的规则（见第 101 页脚注③）。——103，①

② 总之，τ_2 被当作一个已知参数，所有的东西都依赖于它，包括 τ_1 从中做出选择的集合 A_{τ_2}。——103，②

么，$H(\tau_1,\tau_2)$的值将等于

$$v_2 = \mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1,\tau_2).$$

上述讨论应该弄清楚了的是，对于每一位玩家来说，博弈 Γ_2 的每一次博弈都有一个确定的值。对于玩家 1 来说，这个值就是上面的 v_2，从而，对于玩家 2 来说，这个值是 $-v_2$。

为了突出整个方案的对称性，经过适当修改，我们重复一下 14.3.1 中的分析。这有助于为 v_2 的意义提供一个更详细的想法。

(14:B:d) 无论玩家 2 如何玩，玩家 1 都能够通过恰当的玩法确保自己的收益 $\geqq v_2$；无论玩家 1 如何玩，玩家 2 都能够通过恰当的玩法确保自己的收益 $\geqq -v_2$。

（证明：选择 B 中任意的 τ_2 给出后者；选择 A_{τ_2} 中任意的 τ_1 给出前者。）

上述结论可以被等价地表述为：

(14:B:e) 无论玩家 1 如何玩，玩家 2 都能够通过恰当的玩法确保玩家 1 的收益 $\leqq v_2$，即防止玩家 1 的收益 $> v_2$；无论玩家 2 如何玩，玩家 1 都能够通过恰当的玩法确保玩家 2 的收益 $\leqq -v_2$，即防止玩家 2 的收益 $> -v_2$。

104

14.3.4 14.3.1 和 14.3.3 中分别给出的关于 Γ_1,Γ_2 的讨论呈现出相互对称或对偶的关系。如我们在 14.3.3 开头指出的那样，通过对换玩家 1 和玩家 2 的角色，我们可以从其中一个得出另一个。对于这一对换，Γ_1 或 Γ_2 自

身并不是对称的。事实上，这只不过是这样一个事实的重述，即玩家 1 与玩家 2 的角色的对换也对换了 Γ_1 和 Γ_2 这两个博弈，并因此而修改了两者。与此一致的是，我们在 14.3.1 和 14.3.3 中给出的有关 Γ_1 和 Γ_2 的好的策略的各种说法——即（14：A：a）、（14：A：b）、（14：B：a）和（14：B：b）——对于玩家 1 和玩家 2 来说并不对称。我们再次看到：玩家 1 与玩家 2 的对换也对换有关 Γ_1，Γ_2 的有关定义，并因此而修改了两者。①

因此，非常明显，一局博弈的值（Γ_1 的 v_1，Γ_2 的 v_2）的描述对于玩家 1 和玩家 2 来说是充分对称的。这正是 14.3.1 末尾和 14.3.3——即（14：A：c）、（14：A：d）、（14：A：e）、（14：B：c）、（14：B：d）和（14：B：e）[（14：A：c）和（14：B：c）末尾的公式除外]——所表明的事情。根据上面所说，这等于说，对于 Γ_1 和 Γ_2，这些描述是以严格相同的方式表述的。② 当然了，通过审视相关段落，所有这些是同样清楚的。

因此，在 14.3.1 和 14.3.3 的（14：A：c）、（14：A：d）、（14：A：e）、（14：B：c）、（14：B：d）和（14：B：e）中，我们成功地以相同方式定义了 Γ_1，Γ_2 的一局博弈的值，而且，尽管

---

① 注意，如果我们允许每个玩家在对换过程中带着各自的函数 $H_1(\tau_1,\tau_2)$，$H_1(\tau_1,\tau_2)$，那么，最初的博弈 Γ 对于玩家 1 和玩家 2 来说是对称的；也就是说，在 Γ 中，玩家 1 和玩家 2 的个人动作具有相同的特征。

对于狭义的对称概念，函数 $H_1(\tau_1,\tau_2)$，$H_2(\tau_1,\tau_2)$ 是保持不变的，见 14.6。——104，①

② 这一点值得认真考虑：自然，这两个描述必须通过对换玩家 1 和玩家 2 的角色来从一个得到另一个。但是，在这种情况下，在没有对换玩家时，这些说法也是一致的。这归因于其个别对称性。——104，②

玩家 1 和玩家 2 在这两个博弈中各自的角色根本不同，我们的定义对于玩家 1 和玩家 2 来说却是对称的。我们从此获得了一种希望，即一局博弈的值的这一定义可以按照同一形式被用于其他博弈，尤其是介于 Γ_1, Γ_2 之间的博弈 Γ。当然，这个希望仅仅适用于一局博弈的值这一概念本身，而不适用于得到它的推理。Γ_1 和 Γ_2 特有的东西则完全不适用于 Γ 本身。也就是说，与(14:A:a)、(14:A:b)、(14:B:a)和(14:B:b)相比，我们对(14:A:d)、(14:A:e)、(14:B:d)和(14:B:e)寄予更多期望。

105 显然，这些只是试探性的。至此，我们甚至还没有证明能够以这种方式为 Γ 定义一个数值。接下来，我们将详细讨论如何填补这个缺失。我们将会看到，在开始的时候，一些严重的困难似乎制约着这一方法的适用性，但是，通过引入一个新的工具，消除这些困难将是可能的(见 14.7.1,17.1—17.3)。

14.4 结论

14.4.1 我们已经看到，仅就玩家 1 来说，一局的值的一个完全看似合理的解释将 Γ_1, Γ_2 的值分别被确定为

$$v_1 = \mathrm{Max}_{\tau_1} \mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1, \tau_2),$$
$$v_2 = \mathrm{Min}_{\tau_2} \mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1, \tau_2)。$$①

由于对于玩家 1 来说博弈 Γ_1 劣于博弈 Γ_2——在 Γ_1 中，他必须先于他的对手做出动作，并充分告诉对手他的选择；在 Γ_2 中，情况则正好相反—— 一个合理的结论是，

---

① 对于玩家 2 来说，相应的两个值分别为 $-v_1$ 和 $-v_2$。——105,①

Γ_1 的值小于或等于(即绝对不会大于)Γ_2 的值。你可以怀疑这是否是一个严格"证明"。这个问题很难回答，不过，这一口头论述的认真分析表明，它与我们已有的这一命题的数学证明完全一致。事实上，命题

$$v_1 \leqq v_2$$

与 13.4.3 中的(13:A*)一致。(那里的 φ, x, y 对应着我们这里的 H, τ_1, τ_2。)

通过对玩家 1 和玩家 2 的"才智"做出适当假设，我们可以将 v_1, v_2 与 Γ 联系起来，而不是分别将其归于不同于 Γ 的两个博弈 Γ_1, Γ_2。

事实上，博弈 Γ 的规则描述了每一位玩家必须在不知道其对手选择结果的情况下做出他自己的选择(他的动作)。然而，我们可以设想，其中的一位玩家，如玩家 2，"发现"了对手的情况；也就是说，他以某种方式获得了有关其对手的策略的知识。① 这一知识的基础不是我们要关心的事情。它也许(但未必)来自过去博弈的经验。不管怎样，我们假设玩家 2 有这一知识。当然，在这种情况下，玩家 1 将改变其策略；不过，让我们再次假设，无论理由是什么，他并不这样做。② 在这些假设条件下，我们可以说玩家 2 已经发现了他的对手。

在这种情况下，Γ 中的条件变得严格等同于博弈 Γ_1， 106
从而 14.3.1 中的讨论一字不漏地适用于 Γ。

---

① 在正规形式的博弈 Γ 中，策略就是该玩家在这一惟一的个人动作中的实际选择。回忆一下，这一正规形式是如何从这一博弈最初扩展型中推导出来的？因此，这一选择等价地对应着原博弈中的策略。——105，②

② 关于这些假设的解释，见 17.3.1。——105，③

类似，我们可以设想相反的可能情况，即玩家 1 已经摸透了他的对手。那么，Γ 中的条件就变得完全等同于 Γ_2 了，从而 14.3.3 中的讨论完全适用于 Γ。

基于上述讨论，我们能够说：

博弈 Γ 的一局博弈的值是一个明确界定的量，其充分必要条件是，我们做出以下两种极端假设之一：玩家 2 发现了他的对手，或玩家 1 发现了他的对手。在第一种情况下，一局博弈的值，对于玩家 1 来说是 v_1，对于玩家 2 来说是 $-v_1$；在第二种情况下，一局博弈的值，对于玩家 1 来说是 v_2，对于玩家 2 来说是 $-v_2$。

14.4.2 这一讨论表明，如果在没有进一步的条件和改动的情况下，Γ 本身的一局博弈的值能够被确定下来，它必定介于 v_1 与 v_2 之间。（我们假设这是对于玩家 1 来说的值。）也就是说，如果我们用 v 记（对于玩家 1 来说的）Γ 本身的可能取值，那么，必定有：

$$v_1 \leqq v \leqq v_2。$$

v 取值的这个区间的长度是

$$\Delta = v_2 - v_1 \geqq 0。$$

同时，Δ 代表着（博弈 Γ 中）“发现”对手而不被对手“发现”而获得的收益。[①]

该博弈也可能是这样的，无所谓其中哪一位玩家发现了对方，即上述收益为零

---

① 注意，这个收益表达式适用于两位玩家之中的任何一个。对于玩家 1 来说，这一收益是 $v_2 - v_1$；对于玩家 2 来说，它是 $(-v_1)-(-v_2)=v_2-v_1$，从而两者是相等的，即都等于 Δ。——106，①

$$\Delta = 0,$$

或等价地表述为

$$v_1 = v_2,$$

如果将 v_1, v_2 的定义代入上式，那么，

$$\mathrm{Max}_{\tau_2}\mathrm{Min}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)。$$

如果博弈 Γ 具有这些性质，那么，我们称 Γ 为严格决定的博弈。

这一条件的上述最后形式需要与 13.3.1 中的(13:3)和 13.4.1—13.5.2 中的讨论进行比较。(那里的 φ、x、y 对应着我们这里的 H、τ_1、τ_2。)事实上，13.4.3 中(13:B*)就意味着，博弈 Γ 是严格决定的，其充分必要条件是 $H(\tau_1,\tau_2)$的一个鞍点存在。

14.5　严格决定性分析

14.5.1　我们假设博弈 Γ 是严格决定的，即 $H(\tau_1,\tau_2)$的一个鞍点存在。

在这种情况下，考虑到 14.4.2 中的分析，我们希望有 107
可能把量

$$v = v_1 = v_2$$

解释为博弈 Γ(对于玩家 1 来说)的一局博弈的值。回想 v_1, v_2 的定义和 13.4.3 中鞍点值的定义，并且利用 13.5.2 中的(13:C*)，我们看到，上述方程也可以被写成

$$v = \mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)$$
$$= \mathrm{Sa}_{\tau_1/\tau_2}H(\tau_1,\tau_2)。$$

重复 14.3.1 末尾和 14.3.3 末尾给出的步骤，不难证明，上述结果能够被解释为(对于玩家 1 来说)Γ 的一局博

弈的值。

特别是：14.3.1 和 14.3.3 中分别适用于 Γ_1 和 Γ_2 的(14:A:c)、(14:A:d)、(14:A:e)、(14:B:c)、(14:B:d)和(14:B:e)现在能够应用于 Γ 本身。我们首先重新表述(14:A:d)和(14:B:d)：

(14:C:d) 无论玩家 2 如何玩，玩家 1 总能够通过恰当的玩法确保自己的收益 $\geqq v$；

无论玩家 1 如何玩，玩家 2 总能够通过恰当的玩法确保自己的收益 $\geqq -v$。

要证明这一结果，我们再次建立 14.3.1 中(14:A:a)的集合 A 和 14.3.3 中(14:B:a)的集合 B。实际上，它们正是 13.5.1 的集合 A^{φ} 和 B^{φ}（φ 对应着我们的 H）。我们重述如下：

(14:D:a) A 是这样的 τ_1 组成的集合，对于这些 τ_1，$\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1, \tau_2)$ 取其最大值，即

$$\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{Max}_{\tau_1} \mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1, \tau_2) = v。$$

(14:D:b) B 是这样的 τ_2 组成的集合，对于这些 τ_2，$\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1, \tau_2)$ 取其最小值，即

$$\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{Min}_{\tau_2} \mathrm{Min}_{\tau_1} H(\tau_1, \tau_2) = v。$$

现在，(14:C:d)的证明十分容易：

令玩家 1 从 A 中选择 τ_1，那么，无论玩家 2 做什么，即对任一 τ_2，我们有 $H(\tau_1, \tau_2) \geqq \mathrm{Min}_{\tau_1} H(\tau_1, \tau_2) = v$，即玩家 1 的收益 $\geqq -v$。

令玩家 2 从 B 中选择 τ_2，那么，无论玩家 1 做什么，即对任一 τ_1，我们有 $H(\tau_1, \tau_2) \leqq \mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1, \tau_2)$，即玩家 1 的收益 $\leqq v$，从而玩家 2 的收益 $\geqq -v$。

证明完毕。

现在，我们转向方程(14:A:e)和(14:B:e)的等价说法。事实上，如上面说明的那样，(14:C:d)能够等价地表述为：

(14:C:e)　　无论玩家 1 做什么，玩家 2 总能通过恰当的玩法保证玩家 1 的收益≦v，即阻止它的收益 >v。

　　无论玩家 2 做什么，玩家 1 总能通过 108
恰当的玩法保证玩家 2 的收益≦ -v，即阻止他的收益 > -v。

(14:C:d)和(14:C:e)使我们令人满意地把 v 解释为 Γ 的一局博弈的值对于玩家 1 来说是 v，对于玩家 2 来说是 -v。

14.5.2 现在，我们考虑(14:A:a)、(14:A:b)、(14:B:a)和(14:B:b)的等价说法。

根据 14.5.1 中的(14:C:d)，对于玩家 1 来说，我们可以合理地把博弈 Γ 的一个好的玩法定义为这样一个方法，这个方法保证他获得一个收益，这个收益大于或等于该博弈的一局对于玩家 1 来说的值。也就是说，对于玩家 1 来说，一个好的玩法是 τ_1 的一个选择，对于任何 τ_2，$H(\tau_1,\tau_2)\geqq v$。这可以被等价地表述为 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)\geqq v$。

这样，我们总有 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)\leqq \mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)=v$。

因此，根据 14.5.1 中的(14:C:a)，对于 τ_1，上述条件等于 $\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2)=v$，即 τ_1 属于 A。

由 14.5.1 中的(14:C:d),我们可以合理地把对于玩家 2 来说博弈 Γ 的一个好的玩法定义为这样一个方法,这个方法保证他获得一个收益,这个收益大于或等于对于玩家 2 来说一局博弈的值。也就是说,对于玩家 2 来说,一个好的玩法是 τ_2 的一个选择,对于所有 τ_1, $-H(\tau_1,\tau_2) \geqq -\mathrm{v}$。也就是说,对于所有 τ_1,$H(\tau_1,\tau_2) \leqq \mathrm{v}$。$\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1,\tau_2) \leqq \mathrm{v}$。

所以,我们总有 $\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1,\tau_2) \geqq \mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{v}$。关于 τ_2 的上述条件等于说 $\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{v}$。由 14.5.1 中的(14:D:b),$\tau_2$ 属于 B。

所以,我们有:

(14:C:a) 对于玩家 1 来说,博弈 Γ 的一个好的玩法(策略)是选择一个属于 A 的 τ_1,而 A 是 14.5.1 中(14:D:a)的集合。

(14:C:b) 对于玩家 2 来说,博弈 Γ 的一个好的玩法(策略)是选择一个属于 B 的 τ_2,而 B 是 14.5.1 中(14:D:b)的集合。①

最后,如在本节开头说过的那样,好的玩法的直接结果是(14:A:c)或(14:B:c)的下述等价说法:

(14:C:c) 如果玩家 1 和玩家 2 都是玩博弈 Γ 的高手,即 τ_1 属于 A 且 τ_2 属于 B,那么,$H(\tau_1,\tau_2)$ 的值将等于该博弈对于玩家 1 来说的值,即 v。

---

① 这一博弈中每位玩家都必须在不知道另一位玩家的选择(τ_2 或 τ_1)的情况下做出自己的选择(τ_1 或 τ_2)。请将其与 14.3.1 中有关 Γ_1 的(14:A:b)比较,并将其与 14.3.3 中有关 Γ_2 的(14:B:b)比较。——108,①

结合 13.5.2 中的(13:D*),14.5.1 中(14:D:a)和(14:D:b)的前面关于集合 A 和 B 的说明,我们有:

(14:C:f)　玩家 1 和玩家 2 都是玩博弈 Γ 的高手——即 τ_1 属于 A 且 τ_2 属于 B——的充分必要条件是,τ_1,τ_2 是 $H(\tau_1,\tau_2)$ 的一个鞍点。

14.6　玩家对换和对称性

14.6　14.5.1 和 14.5.2 中的(14:C:a)—(14:C:f)决定了有关严格决定的二人零和博弈的所有事情。总之,在 14.3.1 和 14.3.3 中,关于 Γ_1 和 Γ_2,我们从(14:A:a)、(14:A:b)、(14:B:a)和(14:B:b)推出了(14:A:d)、(14:A:e)、(14:B:d)和(14:B:e);在 14.5.1 和 14.5.2 中,关于 Γ 本身,我们从(14:C:d)和(14:C:e)得出了(14:C:a)和(14:C:b)。这是一个很大的进步,因为 14.3.1 和 14.3.3 中支持(14:A:a)、(14:A:b)、(14:B:a)和(14:B:b)的那些说明远比 14.5.1 和 14.5.2 中支持(14:C:d)和(14:C:e)的那些说明更具有启发性。 109

函数 $H(\tau_1,\tau_2)\equiv H_1(\tau_1,\tau_2)$ 的运用暗含着这一方案一定的非对称性。因此,玩家 1 扮演着特殊的角色。然而,直觉上,有一点是清楚的,即如果我们赋予玩家 2 同样的特殊角色,那么,我们就会推导出等价的结果。由于玩家 1 与玩家 2 对换在以后的讨论有着一定的意义,我们要对此进行简单的数学讨论。

在博弈 Γ 中对换玩家 1 和玩家 2——对此,我们不必假设 Γ 是严格决定的——等于用函数 $H_2(\tau_2,\tau_1)$ 和 $H_1(\tau_2,$

τ_1)替换函数 $H_1(\tau_1,\tau_2)$ 和 $H_2(\tau_1,\tau_2)$。[①②] 因此,这一交换的含义是用 $-H(\tau_2,\tau_1)$ 替换 $H(\tau_1,\tau_2)$。

现在,这一符号变化产生的影响是 Max 和 Min 这两种运算的对换。因此,14.4.1 中定义的量

$$\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2)=\mathrm{v}_1,$$
$$\mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)=\mathrm{v}_2,$$

现在变成了

$$\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}[-H(\tau_2,\tau_1)]=-\mathrm{Min}_{\tau_1}\mathrm{Max}_{\tau_2}H(\tau_2,\tau_1)$$
$$=-\mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)^{③}=-\mathrm{v}_2。$$
$$\mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}[-H(\tau_2,\tau_1)]=-\mathrm{Max}_{\tau_2}\mathrm{Min}_{\tau_1}H(\tau_2,\tau_1)$$
$$=-\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2)^{④}=\mathrm{v}_1。$$

这样,v_1、v_2 变成了 $-\mathrm{v}_2$、$-\mathrm{v}_1$。[⑤] 所以,

$$\Delta=\mathrm{v}_2-\mathrm{v}_1=(-\mathrm{v}_1)-(-\mathrm{v}_2)$$

110 的值并未受到影响[⑥],而且如果 Γ 本来是严格决定的,它现在仍然是严格决定的,因为严格决定性等价于 $\Delta=0$。

---

① 这已不是 14.3.4 中使用的玩家对换。在那里,我们只关心在每个动作时的安排和信息状态,而且我们假设玩家 1 和玩家 2 在对换位置时带着它们的函数 $H_1(\tau_1,\tau_2)$ 和 $H_2(\tau_1,\tau_2)$(见第 104 页脚注①)。从这个意义上说,Γ 是对称的,即不受这一对换影响。

这里,我们完全对换了玩家 1 和玩家 2 的角色,包括他们的函数 $H_1(\tau_1,\tau_2)$ 和 $H_2(\tau_1,\tau_2)$。——109,①

② 我们不得不交换变量 τ_1、τ_2,因为 τ_1 代表着玩家 1 的选择,τ_2 代表着玩家 2 的选择。现在 τ_2 的值域是 $1,\cdots,\beta_1$。因此,像过去的 $H_k(\tau_1,\tau_2)$ 那样,逗号前面变量的值域是 $1,\cdots,\beta_1$,逗号后面变量的值域是 $1,\cdots,\beta_2$。——109,②

③ 这只是记号的交换:τ_1、τ_2 分别用 τ_2、τ_1 替换。——109,③

④ 同上。——109,③

⑤ 如预料中的那样,这与第 105 页脚注①一致。——109,④

⑥ 如预料中的那样,这与第 106 页脚注①一致。——110,①

在这种情况下，$v = v_1 = v_2$ 变成了

$$-v = -v_1 = -v_2。$$

现在，不难验证，14.5.1 和 14.5.2 中的(14:C:a)—(14:C:f)在玩家 1 和玩家 2 交换之后仍然成立。

14.7 非严格决定的博弈

14.7.1 所有这些彻底解决了严格决定的博弈，但是没有解决其他博弈。对于一个非严格决定的博弈，我们有 $\Delta > 0$，即在这样一个博弈中，"发现"对手有着正的收益。因此，这些结果即 Γ_1 和 Γ_2 的值之间存在着本质不同，从而在这些博弈的玩法之间也存在着本质不同。14.3.1 和 14.3.3中的分析为 Γ 的研究指出了方向。14.5.1，14.5.2 的结果并不同时适用于两者，因为它们利用了 $H(\tau_1, \tau_2)$ 的鞍点的存在性并且利用了

$$\mathrm{Max}_{\tau_1} \mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{Min}_{\tau_2} \mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1, \tau_2),$$

即 Γ 是严格决定的。14.4.2 开头的不等式当然有着明显的合理性。据此，对于玩家 1 来说，博弈 Γ 的一局博弈的值严格由

$$v_1 \leqq v \leqq v_2$$

限定，如果这一概念能够一般地建立起来的话。①

不过，这为 v 留下了一个长度为 $\Delta = v_2 - v_1 > 0$ 的区间。而且，除此之外，从概念上说，总的情况也变得极不令人满意。

我们也许倾向于彻底放弃：这是因为，在这样一个博

① 见 17.8.1。——110，②

弈 Γ_1 中,存在着"发现"对手的好处,从表面上看,要找到一个解似乎是不可能的事情,除非明确假定"谁发现谁"和发现的程度。[1]

我们将在第 17 节中看到,事情并非如此,尽管 $\Delta>0$,按照上面的做法,一个解还是能够得到的。不过,我们建议,在我们向这一困难发起攻击之前,首先列举一些 $\Delta>0$ 和$\Delta=0$的博弈。对于前一类——即非严格决定的博弈,我们只进行简单研究,其详细研究将在17.1.1进行。严格决定的后一类博弈将得到较为详细的分析。

14.7.2 由于有些函数 $H(\tau_1,\tau_2)$ 没有鞍点[见 13.4.1 和 13.4.2,那里的 $\varphi(x,y)$ 就是我们的 $H(\tau_1,\tau_2)$],所以存在着非严格决定的博弈 Γ。考虑到紧接着的应用,我们重新研究那些例子,即第 94 页图 12、图 13 的矩阵所描述的函

111 数。也就是说,我们要明确描述它们所属博弈类型。[在每一个例子中,我们用 $H(\tau_1,\tau_2)$ 替换 $\varphi(x,y)$。在每一矩阵中,τ_2 是列号,τ_1 是行号。也可见第 99 页图 15。]

图 12:这是"硬币配对"游戏。令 1 代表"正面",2 代表反面,那么,如果 τ_1 与 τ_2"对上了",即相等了,矩阵的元素取值 1,如果没有"对上"则取值 -1。玩家 1 拿一枚硬币与玩家 2 对:如果两者"对上了",那么,他赢一枚;如果两者没有"对上",他输一枚。

图 13:这是"石头、剪子、布"游戏。令 τ_1(或 τ_2)$=1$ 代表"石头",2 代表"布",3 代表"剪子"。该矩阵的元素

① 说得更明白些:$\Delta>0$ 意味着,在这一博弈中,两位玩家不可能同样聪明。因此,我们要具体知道某一位玩家比其对手聪明的程度。——110,③

1 和 -1 的分布代表着："布"胜"石头"，"剪子"胜"布"，"石头"胜"剪子"。[1] 如果玩家 1 胜玩家 2，他赢一个单位；如果他败了，输一个单位。否则（如果两者做出相同选择）算无胜负。

14.7.3 这两个例子明确表明了我们在一个非严格决定的博弈中可能遇到的困难。只是因为它们极其简单，我们才能够把这一困难彻底分离出来。在"硬币配对"和"石头、剪子、布"游戏中，重要的是，任何一种玩法——即任何 τ_1 或 τ_2——都与另一种玩法一样好："正面"或"反面"，"石头"、"布"或"剪子"本身并无优劣之分。有意义的事情惟有猜测对手将会做出的选择；但是，没有进一步的假设，我们将如何描述玩家们的"才智"呢？[2]

当然，存在着更加复杂的非严格决定博弈，而且从各种较为微妙的技术角度看，这些博弈也是重要的（见第 18、19 节）。但是，如果我们要解决的是主要困难，那么，"硬币配对"和"石头、剪子、布"这两个简单博弈则是十分完美的典型。

14.8 严格决定性的详细分析方案

14.8 虽然严格决定的——我们的解对其成立的——博弈 Γ 只是一种特殊情况，我们却不应该低估它们

① "布"包住"石头"，"剪子"剪"布"，"石头"砸"剪子"。——111，①

② 如我们在上面提到过的那样，我们将在 17.1 中证明，这是能够做到的。——111，②

包括的范围。我们正在使用的是博弈 Γ 的正规型。这一事实也许会引诱这样的低估：它把事情弄得较其真正的面目简单。我们必须牢记，τ_1，τ_2 代表的是博弈 Γ 的扩展型中的策略，如 14.1.1 中提到的那样，它有可能是一个极为复杂的结构。

为了理解严格决定性的含义，我们有必要结合博弈的扩展型来对其进行研究。这提出了关于机会或个人动作
112 的详细性质和玩家的信息状况等问题。也就是说，正如 12.1.1 中提到过的那样，我们遇到了以扩展型为基础的结构分析。

我们尤其感兴趣的是这样一些博弈，其中，每当一个玩家要做出一个个人动作时，他完全知道此前所有动作的选择结果。这些博弈已经在 6.4.1 中被提及，而且，我们在那里指出过，它们一般被看作具有特定的合理特征。接下来，我们将证明，所有这类博弈都是严格决定的，从而在某种严格意义上证明这一合理特征。这样，不仅当所有动作都是个人动作时，这一点是正确的，而且，当机会动作出现时，这一点也是正确的。

15. 具有完美信息的博弈

15.1 目的

15.1.1 我们要进一步讨论二人零和博弈，目的是找出完全决定的博弈所组成的一个尽可能大的子类，对于这

类博弈来说，14.4.1 中评价博弈的重要数量

$$v_1 = \mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2),$$

$$v_2 = \mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)$$

满足

$$v_1 = v_2 = v。$$

我们将证明，当 Γ 中存在着完美信息时，即当预备性等价于先前性（见 6.4.1 和 14.8 末尾）时，那么，Γ 是严格决定的。我们还将讨论这一结果在概念上的意义（见 15.8）。事实上，我们将把这作为有关 v_1 和 v_2 的一个更加一般法则的一个特殊情况来推导（见15.5.3）。

在开始的时候，我们的讨论更具有一般性，我们可以讨论一个完全不受约束的 n 人博弈 Γ。在以后的例子中，较大的一般性是有用的。

15.1.2　设 Γ 是一个 n 人博弈，而且，其扩展型是给定的。我们将考虑 Γ 的一些特定方面。我们首先用第 6 节和第 7 节中的理论术语进行讨论（见 15.1），然后将其转换为第 9 节和第 10 节中的集合和分拆术语（见15.2）。借助前者，读者将有可能获得一个全面的理解；更加形式化的后者只不过是为了绝对严格，以表明我们实际上是严格按照 10.1.1 的公理进行的。

我们考虑 Γ 中所有的动作所组成的序列：$M_1, M_2, \cdots, M_\nu$。让我们首先讨论第一个动作以及此时的情况。

由于没有什么事情先于动作 M_1 发生，也就没有什么东西是它的预备。也就是说，这一动作的特征不依赖于任何事情，是常数。无论 M_1 是一个机会动作，还是一个个人 113
动作，上述说法都正确；在后一种情况下，也无所谓 M_1 属

于哪一位玩家,即 6.2.1 中 $k=0,1,\cdots,n$ 的取值;无所谓 M_1 时备择的个数 α_1。当 M_1 是一个机会动作(即 $k=0$)时,无所谓各个备择的概率 $p_\kappa(1),\cdots,p_\kappa(\alpha_1)$。$M_1$ 时的选择的结果是 $\sigma_1=1,\cdots,\alpha_1$ 之一。

现在,按照各数学分支中广泛使用的"完全归纳"法的精神,博弈 Γ 的数学分析的一个明显步骤浮现在我们眼前。这个步骤是,如果可行的话,用比 Γ 少一个动作的其他博弈的分析来取代 Γ 的分析。① 这一步骤由选定一个 $\bar{\sigma}_1=1,\cdots,\alpha_1$ 组成,并且用 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 记这样一个博弈,其中除了 M_1 被去掉之外,它与 Γ 在各个细节都相同,不过,(按照新博弈的规则),选定的 σ_1 用 $\sigma_1=\bar{\sigma}_1$ 表示。② $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 的确比 Γ 少一个动作:它的动作是 $M_2,\cdots,M_\nu$。③

---

① 即 $\nu-1$ 个动作。如果可行的话,重复这一"归纳"步骤,将使 Γ 减少到 0 步,即一个固定的、不可选择的结果。而且,这自然意味着 Γ 的一个完备解。见 15.6.1 中的(15:C:a)。——113,①

② 例如,Γ 是国际象棋,$\bar{\sigma}_1$ 是"白方"即玩家 1 的开局,即 M_1 时的选择,那么,$\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 还是国际象棋,不过,其开局是普通国际象棋的第二个动作——"黑方",玩家 2——且正处于由"开局"$\bar{\sigma}_1$ 带来的局面。这就是说,"开局"可以是传统走法,但未必总是传统走法(如 E2—E4)。

在桥牌锦标赛中有同样的做法,其中裁判为选手们分牌,裁判知道这些事先发好的牌。例如复式桥牌比赛中就是这么做的。

在第一个例子中,已经指明的动作 M_1 最初是("白方",玩家 1 的)一个个人动作;在第二个例子中,它最初是一个机会动作("发牌")。

在有些博弈中,偶尔会有"让子"(如围棋、象棋中的"让子"或"让先"),这相当于一个或多个这类做法。——113,②

③ 实际上,我们应该使用指数 $1,\cdots,\nu-1$,并通过将它们写成 $M_1^{\bar{\sigma}_1},M_2^{\bar{\sigma}_1},\cdots,M_{\nu-1}^{\bar{\sigma}_1}$ 来指明它们依赖于 $\bar{\sigma}_1$。不过,我们倾向于使用较简单的记号 $M_2,\cdots,M_\nu$。——113,③

如果我们能够从全部 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$，$\bar{\sigma}_1=1,\cdots,\alpha_1$ 的特征中推导出 Γ 的基本特征，那么，我们的归纳法就取得了成功。

15.1.3 然而，必须注意，$\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 的建立依赖于 Γ 受到的特定约束。事实上，在 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 中，做出一个特定动作的每一位玩家必须被充分告知这一博弈的规则。这样，这一知识等于最初的博弈 Γ 的规则加上 M_1 时已经指明的选择的值 $\bar{\sigma}_1$。$\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 能够在 Γ 的基础上建立起来——而不修改支配玩家在 Γ 中的信息状况的那些规则，除非按照 Γ 的最初规则，M_1 时的选择结果是每个玩家在其个人动作 $M_2,\cdots,M_\nu$ 时知道的，即 M_1 必须是所有个人动作 $M_2,\cdots,M_\nu$ 的预备。我们将此重述为：

(15:A)　　$\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 能够在不修改 Γ 的结构的情况下建立起来的必要条件是，Γ 具有如下性质：

(15:A:a)　　M_1 是动作 $M_2,\cdots,M_\nu$ 的预备。①

15.2 严格条件(第一步)

15.2.1 现在，我们把 15.1.2 和 15.1.3 转换为第 9 节和第 10 节的分拆和集合术语(见 15.1.2 的开头)。因此，我们使用 10.1 中的符号。 *114*

$\mathscr{A}_1$ 由 Ω 一个集合组成[10.1.1 中(10:1:f)]，而且，它是 $\mathscr{B}_1$[10.1.1 中(10:1:a)]的一个子分拆。因此，$\mathscr{B}_1$

① 这是 6.3 中的术语，即我们使用了 7.2.1 中依赖关系的特殊形式。使用 7.2.1 的一般描述，我们必须这样陈述(15:A:a)：对于每一个个人动作 M_κ，$\kappa=2,\cdots,\nu$，集合 Φ 包含 $\bar{\sigma}_1$。——113，④

也由 Ω 一个集合组成(其余集合是空的)。[①②] 即

$$B_1(k)=\begin{cases}\Omega & \text{只对某一个 } k\text{,如 } k=k_1,\\ \ominus & k\neq k_1\text{。}\end{cases}$$

这个 $k_1=0,1,\cdots,n$ 决定着 M_1 的特征;它是6.2.1中的 k_1。如果 $k_1=1,\cdots,n$,即如果该动作是一个个人动作,那么,$\mathscr{A}_1$ 也是 $\mathscr{D}_1(k_1)$ 的一个子分拆。[见10.1.1中(10:1:d)。这只是在 $B_1(k_1)$ 内做出的假设,但 $B_1(k_1)=\Omega$。]因此,$\mathscr{D}_1(k_1)$ 也仅由 Ω 这一个集合组成。[③] 对于 $k\neq k_1$,$\mathscr{D}_1(k)$ 是 $B_1(k)=\ominus$ 中的一个分拆[10.1.1中(10:A:g)],从而必定是空的。

这样,我们恰好有 $\mathscr{A}_1$ 的一个 A_1,它就是 Ω,$k_1=1,\cdots,n$,所有 $\mathscr{D}_1(k)$ 的一个 D_1,它也是 Ω;然而,对于 $k_1=0$,所有的 $\mathscr{D}_1(k)$ 中没有 D_1。

M_1 由从 $\mathscr{C}_1(k_1)$ 中选择一个 C_1 组成;如果 $k_1=0$,由机会决定;如果 $k_1=1,\cdots,n$,由玩家 k_1 决定。在前一种情况下,C_1 自动地是惟一的 $A_1(=\Omega)$ 的一个子集;在后一种情况下,C_1 是惟一的 $D_1(=\Omega)$ 的一个子集。这些 C_1 的个数是 α_1(见9.1.5,特别是第70页脚注②)。又由于问题中的 A_1 和 D_1 是固定的,这个 α_1 是一个确定的常数。α_1 正

---

① 这个 $\mathscr{B}_1$ 是8.3.1中(8:B:a)的一个例外。见第63页脚注①和第69页脚注④中的说明。——114,①

② 证明:Ω 属于 $\mathscr{A}_1$,而 $\mathscr{A}_1$ 是 $\mathscr{B}_1$ 的一个子分拆,因此,Ω 是 $\mathscr{B}_1$ 的某个元素的一个子集。这个元素必然等于 Ω。$\mathscr{B}_1$ 的所有其他元素都与 Ω 不相交(见8.3.1),即空的。——114,②

③ 不像 $\mathscr{B}_1$(见上),$\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{D}(k_1)$ 必须满足8.3.1中的(8:B:a)和(8:B:b),从而两者都不再有 Ω 之外的其他元素。——114,③

是 M_1 时备择的个数，是 6.2.1 和 15.1.2 的 α_1。

这些 C_1 对应着 15.1.2 的 $\sigma_1 = 1, \cdots, \alpha_1$，而且我们相应地将它们记为 $C_1(1), \cdots, C_1(\alpha_1)$。① 10.1.1 中的 (1:1:h) 表明，如实际得到验证了的那样，$\mathscr{A}_2$ 也是 $C_1(1), \cdots, C_1(\alpha_1)$ 组成的集合，即等于 $\mathscr{C}_1$。

到目前为止，我们的分析完全具有一般性，对任何博弈 Γ 的 M_1 都成立（甚至在一定程度上对 M_2 也成立）。读者应该将这些性质转换为 8.4.2 和 10.4.2 意义上的日常生活用语。

现在，我们转向 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$。如 15.1.2 中描述的那样，通过令 $\sigma_1 = \bar{\sigma}_1$，指明动作 M_1，我们就可以从 Γ 得到 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$。同时，这一博弈的动作被限定为 $M_2, \cdots, M_\nu$。这意味着，代表实际选择的元素 π 不再能够在整个 Ω 中变化，而是限于 $C_1(\bar{\sigma}_1)$。而且，9.2.1 中罗列的分拆也仅限于 $\kappa = 2, \cdots, \nu$ 的那些分拆②（对于 $\mathscr{A}_\kappa, \kappa = \nu + 1$）。 *115*

15.2.2　现在，我们给出 15.1.3 的约束条件的等价说法。

要做出 15.2.1 末尾描述的改动，我们要对 Γ 做出一定的限制。

如我们指出过的那样，我们希望将一局博弈，即 π，限制于 $C_1(\bar{\sigma}_1)$ 之内。从而，Γ 的描述中建立起来的那些集合和是 Ω 的子集的那些集合都必定转而变成 $C_1(\bar{\sigma}_1)$ 的子

---

① 他们代表着 6.2，9.1.4 和 9.1.5 中的备择 $\mathscr{A}_1(1), \cdots, \mathscr{A}_1(\alpha_1)$。——114，④

② 我们不想把这一罗列变为 $\kappa = 1, \cdots, \nu - 1$，见第 113 页脚注③。——115，①

集，分拆变成 $C_1(\overline{\sigma}_1)$［或 $C_1(\overline{\sigma}_1)$ 的子集］内的分拆。如何做到这一点呢？

Γ 的描述中（见 9.2.1），分拆分为两类：一类代表客观事实，即 $\mathscr{A}_\kappa$，$\mathscr{B}_\kappa = [B_\kappa(0), B_\kappa(1), \cdots, B_\kappa(n)]$ 和 $C_\kappa(k)$，$k=0,1,\cdots,n$；另一类仅代表着玩家的信息状况①，$\mathscr{D}_\kappa(k)$，$k=1,\cdots,n$。当然了，我们假设 $\kappa \geqq 2$（见 15.2.1）。

在第一类分拆中，我们只需用每个元素与 $C_1(\overline{\sigma}_1)$ 的交集来替换这一元素。因此，$\mathscr{B}_\kappa$ 的变化是用 $C_1(\overline{\sigma}_1) \cap B_\kappa(0)$，$C_1(\overline{\sigma}_1) \cap B_\kappa(1)$，$\cdots$，$C_1(\overline{\sigma}_1) \cap B_\kappa(n)$ 替换 $B_\kappa(0)$，$\cdots$，$B_\kappa(n)$。在 $\mathscr{A}_\kappa$ 中，这甚至是不必要的：它是 $\mathscr{A}_2$ 的一个子分拆（因为 $\kappa \geqq 2$，见 10.4.1），即它是两两不相交集合系 $[C_1(1), \cdots, C(\alpha_1)]$ 的一个子分拆（见 10.4.1）；因此，我们只保留 $\mathscr{A}_\kappa$ 中属于 $C_1(\overline{\sigma}_1)$ 的子集的那些元素，即 $\mathscr{A}_\kappa$ 中落入 $C_1(\overline{\sigma}_1)$ 的那一部分。$\mathscr{C}_k(k)$ 应该被当作 $\mathscr{B}_\kappa$ 来对待，不过，我们把这方面的讨论放在后面。

在第二类分拆即 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 中，我们却不能做上述事情。用 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的元素与 $C(\overline{\sigma}_1)$ 的交集替换 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的这一元素会改变一个玩家的信息状况②，所以应避免这样做。惟一允许的做法是那些在 $\mathscr{A}_\kappa$ 情况下允许的做法：用 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 中属于 $C(\overline{\sigma}_1)$ 的那一部分来替换 $\mathscr{D}_\kappa(k)$。不过，只有当 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 像前面的 $\mathscr{A}_\kappa(\kappa \geqq 2)$ 那样是 $\mathscr{A}_2$ 的一个子分拆时才能这样做。所以，我们必须做出这一假设。

---

① $\mathscr{A}_\kappa$ 代表着裁判的信息状况，但这是一个客观事实：到这一时刻为止的时间已经决定了博弈的进程（见 9.1.2）。——115，②

② 即给予它额外信息。——115，③

现在，$\mathscr{C}_\kappa(k)$ 是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$ 的一个子分拆[见 10.1.1 中(10:1:c)]，从而也是 $\mathscr{A}_2$ 的一个子分拆(按照上述假设)，因此，我们能够用其落入 $C(\overline{\sigma}_1)$ 内的那一部分来取代它本身。

这样，我们看到：对 Γ 的必要约束是，每个 $\mathscr{D}_\kappa(k)(\kappa \geq 2)$ 必须是 $\mathscr{A}_2$ 的一个子分拆。请回忆 8.4.2 和 10.1.2 中(10:A:d*)，(10:A:g*)的解释。它们赋予这一约束的含义是，在个人动作 $M_2, \cdots, M_\nu$，每位玩家被充分告知 M_1 之后(即 M_2 之前)的、用 $\mathscr{A}_2$ 表达的事态。[见 10.4.2 中 116
(10:B)前面的讨论。]也就是说，M_1 必须是所有动作 $M_2, \cdots, M_\nu$ 的预备。

因此，我们再次得到了 15.1.3 的条件(15:A:a)。我们请读者验证 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1}$ 满足 10.1.1 的要求。

15.3 严格条件(完整归纳)

15.3.1 正如我们在 15.1.2 末尾指出的那样，我们希望从所有 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1}(\overline{\sigma}_1 = 1, \cdots, \alpha_1)$ 的特征得出 Γ 的特征，因为这是一个"完备归纳"的一个典型步骤。

然而，此刻我们已经掌握了其(数学)特征的惟一一类博弈是二人零和博弈：对于这些博弈，我们有 v_1 和 v_2 这两个量(见 15.1.1)。所以，我们假设 Γ 是一个二人零和博弈。

我们即将看到，Γ 的 v_1 和 v_2 的确能够借助 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1}(\overline{\sigma}_1 = 1, \cdots, \alpha_1)$ 的 v_1 和 v_2 表达出来(见 15.1.2)。这一情形使得我们有希望将这一归纳继续下去，直至其结论，即以相

同方式建立 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2}$，$\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\overline{\sigma}_3}$，…，$\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\cdots,\overline{\sigma}_\nu}$。[①] 关键是，在这些博弈中，步数（动作个数）依次递减，从 Γ 的 ν，$\Gamma_{\overline{\sigma}_1}$ 的 $\nu-1$，经 $\nu-2$，$\nu-3$，…最终到 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\cdots,\overline{\sigma}_\nu}$ 的 0。也就是说，就像第 76 页脚注②中提到的那个例子那样，$\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\cdots,\overline{\sigma}_\nu}$ 是一个"空"博弈。其中没有动作，玩家 k 得到一个固定数额 $J_k(\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\cdots,\overline{\sigma}_\nu)$。

这是 15.1.2，15.1.3——即第 6 节和第 7 节的术语。用 15.2.1，15.2.2 即第 9 节和第 10 节的术语说，Γ 的 Ω 逐步受到限制：对于 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1}$，$\mathscr{A}_2$ 的 $C_1(\overline{\sigma}_1)$；对于 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2}$，$\mathscr{A}_3$ 的 $C_2(\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2)$，对于 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\overline{\sigma}_3}$，$\mathscr{A}_4$ 的 $C_3(\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\overline{\sigma}_3)$ 等等，最终到 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\cdots,\overline{\sigma}_\nu}$，$\mathscr{A}_{\nu+1}$ 的 $C_\nu(\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\cdots,\overline{\sigma}_\nu)$。而且，最后一个集合只有惟一一个元素，如 $\overline{\pi}$[见 10.1.1 中(10:1:g)]。因此，博弈 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\cdots,\overline{\sigma}_\nu}$ 的结果是固定的：玩家 k 得到固定的数额 $J_k(\overline{\pi})$。

这样一来，博弈 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\cdots,\overline{\sigma}_\nu}$ 的本质就清楚了，即对于每一位玩家来说，这一博弈的值都是明确的。如果从 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1}$ 到 Γ 程序已经建立起来，那么，我们就能够将其用于从 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\cdots,\overline{\sigma}_\nu}$ 到 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\cdots,\overline{\sigma}_{\nu-1}}$，再到 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\cdots,\overline{\sigma}_{\nu-2}}$，…，从 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2}$ 到 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1}$，最终到 Γ。

不过，只有当我们能够构造博弈序列 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1}$，$\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2}$，$\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\overline{\sigma}_3}$，…，$\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\cdots,\overline{\sigma}_\nu}$，即只有当所有这些博弈都满足 15.1.3 或 15.2.2 的最终条件时，上述做法才是可行的。这个要求也可以就一般的 n 人博弈进行描述。因此，我们回到这些 Γ。

---

① $\overline{\sigma}_1=1,\cdots,\alpha_1$；$\overline{\sigma}_2=1,\cdots,\alpha_2$，其中，$\alpha_2=\alpha_2(\overline{\sigma}_1)$；$\overline{\sigma}_3=1,\cdots,\alpha_3$，其中 $\alpha_3=\alpha_3(\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2)$ 等等。——116，①

15.3.2 用 15.1.2,15.1.3(即第 6 节和第 7 节)的术语说,这一要求是,M_1 必须是所有 $M_2,\cdots,M_\nu$ 的预备;M_2 117
必须是所有 $M_3,\cdots,M_\nu$ 的预备;等等。也就是说,预备性必须与先前性一致。

用 15.2.1,15.2.2(即第 9 节和第 10 节)的术语说,所有 $\mathscr{D}_\kappa(k)$,$k\geqq 2$ 都必须是 $\mathscr{A}_2$ 的子分拆;所有 $D_\kappa(k)$,$\kappa\geqq 3$都必须是 $\mathscr{A}_3$ 的子分拆,等等。也就是说,如果 $k\geqq\lambda$,那么,$\mathscr{D}_\kappa(k)$必定是 $\mathscr{A}_\lambda$ 的子分拆。① 由于 $\mathscr{A}_\kappa$ 总是 $\mathscr{A}_\lambda$ 的一个子分拆(见 10.4.1),所以要求所有 $\mathscr{D}_\kappa(k)$是 $\mathscr{A}_\kappa$ 的一个子分拆也就足够了。然而,在 $\mathscr{B}_\kappa(k)$内,$\mathscr{A}_\kappa$ 是 $\mathscr{D}_\kappa(k)$的一个子分拆[见 10.1.1 中的(10:1:d)]。所以,我们的要求等于说 $\mathscr{D}_\kappa(k)$是 $\mathscr{A}_\kappa$ 的落入 $B_\kappa(k)$中的那一部分。② 根据 10.4.2 中的(10:B),这恰好意味着,在 Γ 中,预备性与先前性一致。

基于这些分析,我们已经证明了:

(15:B)　　能够建立分别有

$\nu,\nu-1,\nu-2,\cdots,0$

个动作的博弈组成的序列

(15:1)　　$\Gamma,\Gamma_{\bar\sigma_1},\Gamma_{\bar\sigma_1,\bar\sigma_2},\Gamma_{\bar\sigma_1,\bar\sigma_2,\bar\sigma_3},\cdots,\Gamma_{\bar\sigma_1,\bar\sigma_2,\cdots,\bar\sigma_\nu}$,

充分必要条件是,在博弈 Γ 中,预备性与先前性一致,即信息完美(见 6.4.1 和 14.8 末尾)。

如果 Γ 是一个二人零和博弈,那么,这允

---

① 我们在上面说的是 $\lambda=2,3\cdots$的情况。对于 $\lambda=1$,它是自动地成立的:每一个分拆都是 $\mathscr{A}_1$ 的分拆,因为 $\mathscr{A}_1$ 由集合 Ω 一个集合组成。见 10.1.1 中的(10:1:f)。——117,①

② 见第 63 页脚注③。——117,②

许我们按照序列(15:1)逆向递推——从空博弈 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_\nu}$ 到显著博弈 Γ——来阐明博弈 Γ，其中每一步要借助于我们将在 15.6.2 中说明的从 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 到 Γ 的方法。

15.4 归纳步骤的严格讨论

15.4.1 接下来，我们给出前面提到的从 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1}$ 到 Γ 的步骤①，即"归纳步骤"。Γ 只需满足 15.1.3 或 15.2.2 的最终条件，但它必须是一个二人零和博弈。

所以，我们能够建立所有的 Γ_{σ_1}，$\sigma_1 = 1,\cdots,\alpha_1$，而且它们也是二人零和博弈。我们将 Γ 中两个玩家的策略记为 $\sum_1^1,\cdots,\sum_1^{\beta_1},\sum_2^1,\cdots,\sum_2^{\beta_2}$。如果策略 $\sum_1^{\tau_1}$，$\sum_2^{\tau_2}$ 得到使用，对于两位玩家来说，这一局博弈的结果的"数学期望"分别记为

$$H_1(\tau_1,\tau_2) \equiv H(\tau_1,\tau_2), \qquad H_2(\tau_1,\tau_2) \equiv -H(\tau_1,\tau_2)$$

(见 11.2.3 和 14.1.1)。我们将 Γ_{σ_1} 中相应的数量记为 $\sum_{\alpha_1/1}^{1},\cdots,\sum_{\sigma_1/1}^{\beta_{\sigma_1/1}},\sum_{\alpha_1/2}^{1},\cdots,\sum_{\sigma_1/2}^{\beta_{\sigma_1/2}}$，而且，如果策略 $\sum_{\sigma_1/1}^{\tau_{\sigma_1/1}}$，$\sum_{\sigma_1/2}^{\tau_{\sigma_1/2}}$ 得到使用，那么，则记为

$$H_{\sigma_1/1}(\tau_{\sigma_1/1},\tau_{\sigma_1/2}) \equiv H_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1},\tau_{\sigma_1/2}),$$
$$H_{\sigma_1/2}(\tau_{\sigma_1/1},\tau_{\sigma_1/2}) \equiv -H_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1},\tau_{\sigma_1/2})。$$

118 对于 Γ 和 Γ_{σ_1}，我们将它们的 v_1 和 v_2 的值分别记为

$$v_1 = \mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2} H(\tau_1,\tau_2),$$

---

① 由于不会产生误解，从此以后，我们不再写 $\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_\nu$，而写 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu$。——117，③

$$v_2 = \mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1} H(\tau_1,\tau_2)。$$

和

$$v_{\sigma_1/1} = \mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1/1}}\mathrm{Min}_{\tau_{\sigma_1/2}} H_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1},\tau_{\sigma_2}),$$

$$v_{\sigma_1/2} = \mathrm{Min}_{\tau_{\sigma_1/2}}\mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1/1}} H_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1},\tau_{\sigma_2})。$$

我们的目的是用 $v_{\sigma_1/1}$、$v_{\sigma_1/2}$ 表达 v_1、v_2。

15.1.2 和 15.2.1 中决定着动作 M_1 的特征的 k_1 将起着基本的作用。由于 $n=2$，其可能取值是 $k_1=0,1,2$。我们必须分别考虑这三种情况。

15.4.2 首先考虑第一种情况：$k_1=0$，即 M_1 是一个机会动作。其各个备择 $\sigma=1,\cdots,\alpha_1$ 的概率是 15.1.2 中提到过的 $p_\kappa(1),\cdots,p_\kappa(\alpha_\kappa)$。[$p(\sigma_1)$是 10.1.1 中(10:A:h)的概率 $p_1(C_1)$，$C_1=C_1(\sigma_1)$]。

现在，玩家 1 在 Γ 中的一个策略 $\sum_1^{\tau_1}$ 显然是对随机变量 $\sigma_1=1,\cdots,\alpha_1$① 的每一个取值，在 Γ_{σ_1} 中为玩家 1 指定一个策略 $\sum_{\sigma_1/1}^{\tau_{\sigma_1/1}}$，即 $\sum_1^{\tau_1}$ 对应着，对于 $\tau_{1/1},\cdots,\tau_{\alpha_1/1}$ 的所有可能组合，$\sum_{1/1}^{\tau_{1/1}},\cdots,\sum_{\sigma_1/1}^{\tau_{\sigma_1/1}}$ 的综合。

类似，玩家 2 在 Γ 中的一个策略 $\sum_1^{\tau_1}$ 显然是对随机变量 $\sigma_1=1,\cdots,\alpha_1$ 的每一个取值，在 Γ_{σ_1} 中为玩家 2 指定一个策略 $\sum_{\sigma_1/2}^{\tau_{\sigma_1/1}}$，即 $\sum_2^{\tau_1}$ 对应着，对于 $\tau_{1/2},\cdots,\tau_{\alpha_1/2}$ 的所有可能组合，$\sum_{1/2}^{\tau_{1/2}},\cdots,\sum_{\sigma_1/2}^{\tau_{\sigma_1/2}}$ 的综合。

---

① 直觉上，这是清楚的。读者可以从形式主义的角度验证它，具体做法是把 11.1.1 中的定义和 11.1.3 中的(11:A)应用于 15.2.1 描述的情况。——118，①

这样，Γ 和 Γ_{σ_1} 中的结果的"数学期望"之间有如下关系：

$$H(\tau_1,\tau_2)=\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1}p_1(\sigma_1)H_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1},\tau_{\sigma_1/2})。$$

因此，对于 v_1，我们的公式给出

$$v_1=\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2)$$

$$=\mathrm{Max}_{\tau_{1/1},\cdots,\tau_{\alpha_1/1}}\mathrm{Min}_{\tau_{1/2},\cdots,\tau_{\alpha_1/2}}\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1}p_1(\sigma_1)H_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1},\tau_{\sigma_1/2})。$$

等式最右边求和中的第 σ_1 项 $p_1(\sigma_1)H_{\sigma_1}(\tau_{\sigma_1/1},\tau_{\sigma_1/2})$ 只含
119 有两个变量 $\tau_{\sigma_1/1}$ 和 $\tau_{\sigma_1/2}$。因此，在分离的 σ_1 项中，

$$\sigma_1=1;\cdots;\sigma_1=\alpha_1。$$

以下各对变量

$$\tau_{1/1},\tau_{1/2};\cdots;\tau_{\alpha_1/1},\tau_{\alpha_1/2}$$

不会同时出现。

因此，在建立 $\mathrm{Min}_{\tau_{1/2},\cdots,\tau_{\alpha_1/2}}$ 时，我们能够分别最小化每个 σ_1 - 项；在建立 $\mathrm{Max}_{\tau_{1/1},\cdots,\tau_{\alpha_1/1}}$ 时，我们也能够分别最大化每个 σ_1 项。这样，我们的表达式变成了：

$$\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1}p_1(\sigma_1)\mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1}}\mathrm{Min}_{\tau_{1/2},\cdots,\tau_{\alpha_1/2}}=\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1}p_1(\sigma_1)v_{\sigma_1/1}。$$

因此，我们证明了

(15:2) $$v_1=\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1}p_1(\sigma_1)v_{\sigma_1/1}。$$

交换 Max 和 Min 的位置，重复上述过程，我们有

(15:3) $$v_2=\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1}p_1(\sigma_1)v_{\sigma_1/2}。$$

15.4.3 接下来，我们讨论 $k_1=1$ 的情况，而且，在这种情况下，我们将不得不利用 13.5.3 中的结果。关于这

一结果的高度形式化特征，我们希望，通过说明它是有关博弈的一个直觉上明显的事实的形式化表述，将其弄得更接近读者的想像。这将进一步说明，为什么这一结果在这一特殊情况中起着重要作用。

我们即将对 13.5.3 中的结果做出的解释所依据的是我们在 14.2—14.5 中的讨论，尤其是 14.5.1 和 14.5.2 中的讨论，而且，正是基于这一理由，我们没有在 13.5.3 中将其给出。

为此，我们将使用正规型来考虑一个二人零和博弈 Γ（见 14.1.1）、其小博弈 Γ_1 及其大博弈 Γ_2（见 14.2）。

假如我们决定以这种方式来对待 Γ 的正规型，即将其看作一个扩展型，并且引入策略等，而我们的目的是通过 11.2.2 和 11.2.3 那样的程序得到一个（新的）正规型，那么，正如 11.3，尤其是第 84 页脚注①中描述的那样，什么事情也不会发生。然而，对于小博弈 Γ_1 和大博弈 Γ_2 来说，情况则不同。正如第 100 页脚注②和③中提到的那样，我们还没有给出这两者的正规型。因此，通过 11.2.2 和 11.2.3 那样的程序，把它们变成正规型是恰当的，也是必要的。

由于 Γ_1 和 Γ_2 的完备解已经在 14.3.1 和 14.3.3 中找到，我们可以预计，它们将是严格决定的。① 120

---

① 这只是一个试探性的说明，因为 14.3.1 和 14.3.3 中的解所依据的原理与我们在 14.5.1 和 14.5.2 中说明严格决定的博弈所依据的原理并不完全相同，前者只是向后者前进了一步。事实上，借助"非数学的"纯文字详述，这一论述足以使人信服。不过，我们宁愿从数学上解决这一问题，其理由如同 14.3.2 类似情况中给出的理由。——120，①

正如 14.3.4 开头说明的那样，我们只须讨论 Γ_1。

对于 Γ，我们使用记号 τ_1、τ_2、$H(\tau_1,\tau_2)$ 和 v_1、v_2；对于 Γ_1，我们使用的相应记号是 τ'_1、τ'_2、$H'(\tau'_1,\tau'_2)$ 和 v'_1、v'_2。

玩家 1 在 Γ_1 中的一个策略是指定一个（固定的）值 τ_1（$=1,\cdots,\beta_1$）；玩家 2 在 Γ_1 中的一个策略是指定一个（固定的）值 τ_2（$=1,\cdots,\beta_2$），对于每一个值 τ_1（$=1,\cdots,\beta_1$），τ_2 依赖于 τ_1。① 所以，它是 τ_1 的一个函数：$\tau_2=\tau_2(\tau_1)$。

因此，τ'_1 是 τ_1，而 τ'_2 对应着函数 τ_2，$H'(\tau'_1,\tau'_2)$ 对应着 $H[\tau_1,\tau_2(\tau_1)]$。相应地，

$$v'_1=\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H[\tau_1,\tau_2(\tau_1)],$$
$$v'_2=\mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H[\tau_1,\tau_2(\tau_1)]。$$

因此，Γ_1 是严格决定的，即 $v'_1=v'_2$。这与 13.5.3 中的（13:E）完全一致，只需用 τ_1、τ_2、$\tau_2(\tau_1)$、$H[\tau_1,\tau_2(\tau_1)]$ 替换那里的 x、u、$f(x)$、$\psi[x,f(x)]$。

13.5.3 的结果与 Γ_1 的严格决定性之间的等价说明了为什么 13.5.3 将在后面的讨论中发挥基本作用。Γ_1 是一个极为简单的有完美信息的例子，而有完美信息的博弈正是我们当前的讨论的最终目标（见 15.3.2）。而且，Γ_1 的第一个动作恰恰是我们接下了要讨论的那种动作：它是玩家 1（即 $k_1=1$）的一个个人动作。

---

① 直觉上，这是清楚的。读者可以如下方式从形式化的角度来验证它，具体做法是，如 14.2 中给出的那样，用分拆和集合术语重述 Γ_1 的定义，然后应用 11.1.1 中的定义和 11.1.3 中的(11:A)。

总之，一个基本事实是，在 Γ_1 中，玩家 1 的个人动作是玩家 2 的个人动作的预备。——120，②

15.5 归纳步骤的严格讨论（续）

15.5.1 现在，考虑 $k_1=1$ 的情况，即令 M_1 是玩家 1 的一个个人动作。

玩家 1 在 Γ 中的一个策略 $\sum_1^{\tau_1}$ 显然就是指定一个（固定的）值 $\sigma_1^0(=1,\cdots,\alpha_1)$ 和玩家 1 在 $\Gamma_{\sigma_1}^0$ 中的一个（固定的）策略 $\sum_{\sigma_1^0/1}^{\tau_{\sigma_1^0/1}}$；①即 $\sum_1^{\tau_1}$ 对应着数对 $\sigma_1^0,\tau_{\sigma_1^0/1}$。

另一方面，玩家 2 在 Γ 中的一个策略 $\sum_2^{\tau_2}$ 是，对于变量 $\sigma_1^0=1,\cdots,\alpha_1$② 的每一个取值，在 $\Gamma_{\sigma_1^0/1}$ 中指定玩家 2 的一个策略 $\sum_{\sigma_1^0/2}^{\tau_{\sigma_1^0/2}}$。所以，$\tau_{\sigma_1^0/2}$ 是 σ_1^0 的一个函数：$\tau_{\sigma_1^0/2}=\tau_2(\sigma_1^0)$，即 $\sum_2^{\tau_2}$ 对应着函数 τ_2 且 121

$$-H(\tau_1,\tau_2)=H_{\sigma_1^0}[\tau_{\sigma_1^0/1},\tau_2(\sigma_1^0)]。$$

我们的 v_1 公式给出

$$\begin{aligned}v_1&=\mathrm{Max}_{\sigma_1^0,\tau_{\sigma_1^0/1}}\mathrm{Min}_{\tau_2}H_{\sigma_1^0}[\tau_{\sigma_1^0/1},\tau_2(\sigma_1^0)]\\&=\mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}}\mathrm{Max}_{\sigma_1^0}\mathrm{Min}_{\tau_2}H_{\sigma_1^0}[\tau_{\sigma_1^0/1},\tau_2(\sigma_1^0)]。\end{aligned}$$

现在，根据 13.5.3 中的(13:G)，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Max}_{\sigma_1^0}\mathrm{Min}_{\tau_2}H_{\sigma_1^0}[\tau_{\sigma_1^0/1},\tau_2(\sigma_1^0)]\\&=\mathrm{Max}_{\sigma_1^0}\mathrm{Min}_{\tau_{\sigma_1^0/2}}H_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1},\tau_{\sigma_1^0/2})。\end{aligned}$$

只需用我们的 σ_1^0、$\tau_{\sigma_1^0/2}$、$\tau_2(\sigma_1^0)$、$H_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1},\tau_{\sigma_1^0/2})$ 替换那里的 x、u、$f(x)$、$\psi(x,u)$。③ 因此，

---

① 见第 118 页脚注①或上面的脚注②。——120，③

② 见第 118 页脚注①或第 120 页脚注②。——121，①

③ 在这种情况下，$\tau_{\sigma_1^0/1}$ 必须被当作一个常数。——121，②

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_1 &= \mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}} \mathrm{Max}_{\sigma_1^0} \mathrm{Min}_{\tau_{\sigma_1^0/2}} H_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2}) \\ &= \mathrm{Max}_{\sigma_1^0/1} \mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0}} \mathrm{Min}_{\tau_{\sigma_1^0/2}} H_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2}) \\ &= \mathrm{Max}_{\sigma_1^0/1} \mathrm{v}_{\sigma_1^0/1}\text{。}\end{aligned}$$

我们的 v_2 公式给出[①]

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_2 &= \mathrm{Min}_{\tau_2} \mathrm{Max}_{\sigma_1^0, \tau_{\sigma_1^0/1}} H_{\sigma_1^0}[\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_2(\sigma_1^0)] \\ &= \mathrm{Min}_{\tau_2} \mathrm{Max}_{\sigma_1^0} \mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}} H_{\sigma_1^0}[\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_2(\sigma_1^0)]\text{。}\end{aligned}$$

现在,由 13.5.3 中的(13:E)和(13:G),

$$\begin{aligned}&\mathrm{Min}_{\tau_2} \mathrm{Max}_{\sigma_1^0} \mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}} H_{\sigma_1^0}[\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_2(\sigma_1^0)] \\ &\quad = \mathrm{Max}_{\sigma_1^0} \mathrm{Min}_{\tau_2} \mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}} H_{\sigma_1^0}[\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_2(\sigma_1^0)] \\ &\quad = \mathrm{Max}_{\sigma_1^0} \mathrm{Min}_{\tau_{\sigma_1^0/2}} \mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}} H_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2})\text{。}\end{aligned}$$

在那里,我们只需用我们的 σ_1^0、$\tau_{\sigma_1^0/2}$、$\tau_2(\sigma_1^0)$、$\mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}} H_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2})$ 替换 x、u、$f(x)$、$\psi(x,u)$。[②] 因此,

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_2 &= \mathrm{Max}_{\sigma_1^0} \mathrm{Min}_{\tau_{\sigma_1^0/2}} \mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}} H_{\sigma_1^0}(\tau_{\sigma_1^0/1}, \tau_{\sigma_1^0/2}) \\ &= \mathrm{Max}_{\sigma_1^0} \mathrm{v}_{\sigma_1^0/2}\text{。}\end{aligned}$$

总结(且 σ_1^0 写为 σ_1):

122 (15:4) $\quad \mathrm{v}_1 = \mathrm{Max}_{\sigma_1/1} \mathrm{v}_{\sigma_1/1}$,

(15:5) $\quad \mathrm{v}_2 = \mathrm{Max}_{\sigma_1/1} \mathrm{v}_{\sigma_1/2}$。

15.5.2 最后,我们考虑 $k_1 = 2$ 的情况,即令 M_1 是玩家 2 的一个个人动作。

在上述讨论($k_1 = 1$)中交换玩家 1 和玩家 2。如 14.6

---

① 与 15.4.2 相比,现在,我们对待 v_1,v_2 的方式之间有着本质的不同。——121,③

② 在这种情况下,变量 $\tau_{\sigma_1^0/1}$ 被运算 $\mathrm{Max}_{\tau_{\sigma_1^0/1}}$ 扼杀了。

这一步并非可有可无。如 15.4.3 指出的那样,它运用了 13.5.3 中的(13:E),即那一段落的基本结果。——121,④

中讨论的那样,这一交换等于分别用 $-\mathrm{v}_2$、$-\mathrm{v}_1$ 替换 v_1、v_2,从而,在这里就等于用 $-\mathrm{v}_{\sigma_1/2}$、$-\mathrm{v}_{\sigma_1/1}$ 替换 $\mathrm{v}_{\sigma_1/1}$、$\mathrm{v}_{\sigma_1/2}$。将这些变化代入上面的公式(15:4)和(15:5),显然,这些公式所需的修改只是将 Max 换成 Min。这样,我们有:

(15:6)　　$\mathrm{v}_1 = \mathrm{Min}_{\sigma_1}\mathrm{v}_{\sigma_1/1}$,

(15:7)　　$\mathrm{v}_2 = \mathrm{Min}_{\sigma_1}\mathrm{v}_{\sigma_1/2}$。

15.5.3　我们可以把 15.4.2、15.5.1 和 15.5.2 中的公式(15:2)—(15:7)总结为:

对于变量 $\sigma_1(=1,\cdots,\alpha_1)$ 的所有函数 $f(\sigma_1)$ 定义三个运算 $M^{k_1}_{\sigma_1/1}$, $k_1=0,1,2$:

(15:8)
$$M^{k_1}_{\sigma_1}f(\sigma_1)=\begin{cases}\sum\limits_{\sigma=1}^{\alpha_1}p_1(\sigma_1)f(\sigma_1), & k_1=0,\\ \mathrm{Max}_{\sigma_1}f(\sigma_1), & k_1=1,\\ \mathrm{Min}_{\sigma_1}f(\sigma_1), & k_1=2。\end{cases}$$

那么,

$$\mathrm{v}_k = M^{k_1}_{\sigma_1}\mathrm{v}_{\sigma_1/k} \qquad k=1,2。$$

我们想强调一下有关运算 $M^{k_1}_{\sigma_1}$ 的一些简单事实。

首先,$M^{k_1}_{\sigma_1}$ 扼杀变量 σ_1,即 $M^{k_1}_{\sigma_1}f(\sigma_1)$ 不再依赖于 σ_1。对于 $k_1=1,2$,即对于 Max_{σ_1} 和 Min_{σ_1},13.2.3 已经给出了说明。对于 $k_1=0$,它是显然的。顺便指出,这一运算类似于第 91 页脚注②中作为例子的积分运算。

第二,$M^{k_1}_{\sigma_1}$ 明确依赖于 Γ。这是确凿无疑的,因为 k_1 就出现在 Γ 中,且 σ_1 的取值范围是 $1,\cdots,\alpha_1$。不过,在 $k_1=0$ 的情况下,一个进一步的依赖关系归因于 $p_\kappa(1),\cdots,p_\kappa(\alpha_\kappa)$ 的运用。

第三,v_k 对 $\mathrm{v}_{\sigma_1/k}(k=1,2)$ 的依赖性对于每一个 k_1 值

来说都是一样的。

最后，我们看到，借助纯文字（非数学）的论述，本来也容易把这些公式弄得貌似合理——对于一个机会动作，涉及到的是平均值 $\sum_{\sigma_1=1}^{\alpha_1} p_1(\sigma_1)f(\sigma_1)$，第一个玩家追求的是最大值，其对手之一追求的是最小值。然而，为了充分证明 v_1、v_2 的准确地位，一个严格的数学处理还是必要的。试图做到这一点的纯文字说理难免乱作一团，以至没有任何价值。

15.6 完美信息情况下的结果

123 **15.6.1** 我们回到 15.3.2 末尾描述的情况并保留那里的所有假设，即我们假设博弈 Γ 中有着完美信息，而且它是一个二人零和博弈。15.3.2 末尾描述的方案与 5.5.3中考虑的“归纳”步骤（15:8）结合起来使我们能够决定 Γ 的基本性质。

首先，我们要证明，这样一个博弈总是严格决定的。我们的做法是就该博弈的长度 ν 进行“完全归纳”（见 15.1.2）。这由两步组成：

(15:C:a) 对于最小长度即 $\nu=0$ 的任何博弈，这一点是正确的。

(15:C:b) 对于一个给定的 $\nu=1,2,\cdots$，如果它对于长度为 $\nu-1$ 的博弈是正确的，那么，对于长度为 ν 的博弈，它也是正确的。

(15:C:a)的证明：如果长度 $\nu=0$，那么，这一博弈根本没有任何动作，它的组成是玩家 1 和玩家 2 分别得到固

定的数额，如 w 和 $-\mathrm{w}$。① 因此，$\beta_1 = \beta_2 = 1, \tau_1 = \tau_2 = 1, H(\tau_1, \tau_2) = \mathrm{w}$②，而且，$\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2 = \mathrm{w}$，即 Γ 是严格决定的且 $\mathrm{v} = \mathrm{w}$。③

(15:C:b)的证明：设 Σ 是一个长度为 ν 的博弈，那么，每一个 Γ_{σ_1} 的长度是 $\nu - 1$。根据假设，每个 Γ_{σ_1} 是严格决定的，从而，$\mathrm{v}_{\sigma_1/1} \equiv \mathrm{v}_{\sigma_1/2}$。15.5.3 的公式(15:8)表明④，$\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2$。因此，Γ 也是严格决定的。证明完毕。

15.6.2　下面，我们将进入较细节性的内容，并且明确决定 Γ 的 $\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2 = \mathrm{v}$。对此，我们甚至不需要 15.6.1 的结果。

如 15.3.2 末尾那样，我们建立如下博弈序列

$$\Gamma, \Gamma_{\sigma_1}, \Gamma_{\sigma_1, \sigma_1}, \cdots, \Gamma_{\sigma_1, \cdots, \sigma_\nu},$$⑤

其长度分别为

$$\nu, \nu - 1, \nu - 2, \cdots, 0。$$

记这些博弈的 $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$ 为

$$\mathrm{v}_\kappa, \mathrm{v}_{\sigma_1/k}, \mathrm{v}_{\sigma_1, \sigma_1/k}, \cdots, \mathrm{v}_{\sigma_1, \sigma_1, \cdots, \sigma_\nu/k}。$$

让我们把 15.5.3 的(15:8)用于 15.3.2 末尾描述的 124
"归纳"步骤，即对每一个 $\kappa = 1, \cdots, \nu$，我们用 $\sigma_\kappa, \Gamma_{\sigma_1}, \cdots,$

---

① 见第 76 页脚注②中的博弈或 15.3.1 中的 $\Gamma_{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \cdots, \bar{\sigma}_\nu}$。用分拆和集合术语说：对于 $\nu = 0$，10.1.1 中的(10:1:f)，(10:1:g)表明，Ω 只有一个元素，如 $\bar{\pi}: \Omega = (\bar{\pi})$。这样，$\mathrm{w} = J_1(\bar{\pi})$，$-\mathrm{w} = J_2(\bar{\pi})$起着上述作用。——123，①

② 即每一位玩家只有一个策略，这一策略就是什么也不做。——123，②

③ 这是十分显然的事情。基本步骤是(15:C:b)。——123，③

④ 15.5.3 末尾提到的一个事实，即对于 $\kappa = 1, 2$ 来说，这一个公式对所有 κ_1 的值相同。——123，④

⑤ 见第 117 页脚注③。——123，⑤

$\Gamma_{\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1},\sigma_\kappa}$ 替换 15.5.3 中的 $\sigma_1,\Gamma,\Gamma_{\sigma_1}$。15.5.3 的 k_1 指 $\Gamma_{\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}}$ 的第一个动作，即 Γ 中的动作 M_κ。因此，我们顺便将其记为 $k_\kappa(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1})$（见 7.2.1）。相应地，我们建立运算 $M_{\sigma_\kappa}^{k_\kappa(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1})}$，用它替换 15.5.3 的 $M_{\sigma_1}^{k_1}$。以这种方式，我们得到

(15:10) $\quad \mathrm{v}_{\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1}/k} = M_{\sigma_\kappa}^{k_\kappa(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\kappa-1})}\mathrm{v}_{\sigma_1,\cdots,\sigma_\kappa/k}, k=1,2$。

考虑(15:9)中的最后一个元素，即博弈 $\Gamma_{\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu}$；这落入了 15.6.1 中(15:C:a)的讨论，这个博弈根本没有动作。记其惟一的博弈①为 $\overline{\pi}=\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)$。因此，其固定的 w② 等于 $J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$。这样，我们有：

(15:11) $\quad \mathrm{v}_{\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu/1} = v_{\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu/2} = J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$。

令 $\kappa=\nu$，将(15:10)运用于(15:11)，然后对 $\kappa=\nu-1,\cdots,2,1$ 依次进行。以这种方式，我们得

(15:12) $\quad \mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2 = \mathrm{v} = M_{\sigma_1}^{k_1} M_{\sigma_2}^{k_2(\sigma_1)} \cdots M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1})} J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$。

这再次证明，Γ 是严格决定的，而且明确给出了其取值的公式。

15.7 在国际象棋中的应用

15.7.1 在完美信息的二人零和博弈中，预备性和先前性一致，所以，6.4.1 的暗示和 14.8 的断言得到了证明。我们在那里给出的一般观点是，这些博弈尤其表现出理性特征。现在，这一含糊的观点被赋予了严格的含义，

① 见 15.3.1 中关于 $\Gamma_{\overline{\sigma}_1,\cdots,\overline{\sigma}_\nu}$ 的说明。——124，①

② 见 15.6.1 中的(15:C:a)，尤其是第 123 页脚注①。——124，②

即这些博弈是严格决定的。我们还证明了一个不那么常见于“一般观点”的事实,即当这些博弈包含机会动作时,上述结论也是正确的。

我们在 6.4.1 中讨论了一些具有完美信息的博弈:(没有机会动作)的国际象棋和(有机会动作的)巴加门。因此,对于这些博弈,我们已经证明了一局博弈有一个确定的值,而且存在着明确的最优策略。不过,我们只是抽象地证明了它们的存在性,在大多数情况下,对于其结构,我们的方法过于冗长而不实用。[①]

这里,我们要对国际象棋进行更加详细的讨论。

国际象棋中,一局博弈的结果——即 6.2.2 或 9.2.4 *125*
中的 J_k——被严格限定于 1,0,1。[②] 因此,11.2.2 中函数 G_k 有相同的取值,而且,由于国际象棋中不存在机会动作,11.2.3 中的函数 H_k 也有相同取值。[③] 在下面的讨论中,我们将使用 14.1.1 中的函数 $H=H_1$。

由于 H 只有 1,0,−1 三个取值,

$$(15:13)\qquad \mathrm{v}=\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2)=\mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)$$

必然取 v=1,0,−1,1 之一。

我们请读者证明(15:13)意味着:

---

① 这主要归因于 ν 的值太大。关于国际象棋,见第 59 页脚注的相关内容。(那里的 ν^* 就是我们这里的 ν,见 7.2.3。)——124,③

② 这是玩家 k 在一局中“胜”、“和”或“输”的最简单解释。——125,①

③ G_k 的每一个取值是 J_k 的一个取值。在不存在机会动作的情况下,H_k 的每一个取值是 G_k 的一个取值,见上面提到的段落。如果存在着机会动作,那么,H_k 的取值等于“胜”的概率减去“输”的概率,即一个位于 1 与 −1 之间的数。——125,②

(15:D:a)　　如果 v=1,那么,无论玩家 2(“黑方”)如何玩,玩家 1(“白方”)总有一个“取胜”的策略。

(15:D:b)　　如果 v=0,那么,无论对方如何玩,每一位玩家都能够“求和”(和可能“取胜”)。

(15:D:c)　　如果 v=-1,那么,无论玩家 1(“白方”)如何玩,玩家 2(“黑方”)总有一个“取胜”的策略。①

15.7.2 这说明,如果国际象棋理论被充分研究透彻了,也就没有什么可玩的了。这样的理论将表明(15:D:a)、(15:D:b)和(15:D:c)中何者实际成立,相应地,一局博弈的结果在开始之前就被决定了:在(15:D:a)的情况下,结果是“白胜”;在(15:D:b)的情况下,结果是“和”;在(15:D:c)的情况下,结果是“黑胜”。

但是,我们的证明只保证这三者之中只能有一个成立,却没有给出决定其中哪一个正确的实用方法。这一相对的人类困难使得不完备的、有启发性的玩法成为必需的事情,正是它们构成一局“好的”国际象棋;不然,这类博弈中就会失去“搏斗”和“惊心动魄”的成分。

15.8 文字讨论

126 **15.8.1** 我们以一种较简单而不那么形式化的方法

① 当存在机会动作时,那么,$H(\tau_1,\tau_2)$“胜”的概率减去“输”的概率,见脚注②。玩家尽力最大化或最小化这个数,(15:D:a)—(15:D:c)的严格的三分法一般来说并不包括这种努力。——125,③

来得到我们的主要结果——在有着完美信息的情况下，所有二人零和博弈都是严格决定的。

你可以怀疑下面的讨论是否能够称得上一个证明。也就是说，我们宁愿将其描述为一看似合理的论证，使上述类型的任一博弈 Γ 能够被赋予一个值，不过，这有待批判的。无需详细说明这些批判是站不住脚的，因为，正如 15.4—15.6 那样，我们将得到 Γ 的一局博弈的同一个值 v，而且，我们在那里用严格定义的概念给出了一个绝对严格的证明。下面将给出的表面合理性论证的价值是，它更容易把握，并且有可能在有着完美信息的、不符合二人零和博弈条件的其他博弈中被重复应用。我们希望指出，同样的批判还涉及一般情况，而且它们不再能够被证明是不成立的。事实上，在那里，（即便在有着完美信息的博弈中）解也将按照完全不同的思路被找到。这将使二人零和博弈与一般情况之间的不同的本质更加清楚。要说明一般情况的处理必须采取根本不同的方法，这是十分重要的（见第 24 节）。

15.8.2　考虑一个有着完美信息的二人零和博弈 Γ。我们使用 15.6.2 中的所有符号：动作：$M_1, \cdots, M_\nu$；选择：$\sigma_1, \cdots, \sigma_\nu$；玩家：$k_1, k_2(\sigma_1), \cdots, k_\nu(\sigma_1, \cdots, \sigma_{\nu-1})$；概率：$p_k(1), \cdots, p_k(\alpha_k)$；算子：$M_{\sigma_1}^{k_1}, M_{\sigma_1}^{k_1(\sigma_1)}, \cdots, M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1, \cdots, \sigma_{\nu-1})}$；由 Γ 推导出的博弈序列（15:9）；函数 $J_1[\overline{\pi}(\sigma_1, \cdots, \sigma_\nu)]$。

我们从最后一个动作 M_ν 开始讨论博弈 Γ，并进而通过 $M_{\sigma_{\nu-1}}, \sigma_{\nu-2} \cdots$ 进行递推。首先，假设（动作 $M_1, M_2, \cdots, M_{\nu-1}$ 的）选择 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{\nu-1}$ 已经做出，现在，有待做出的是（动作 M_ν）的选择 σ_ν。

如果 M_ν 是一个机会动作，即如果 $k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})=0$，那么，$\sigma_\nu$ 将分别以概率 $p_\nu(1),p_\nu(2),\cdots,p_\nu[\alpha_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})]$ 取值 $1,2,\cdots,\alpha_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})$。这样，（对于玩家 1 来说）最终支付的数学期望 $J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)]$ 是

$$\sum_{\sigma_\nu=1}^{\alpha_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})} p_\nu(\sigma_\nu)J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)]。$$

如果 M_ν 是玩家 1 或玩家 2 的一个个人动作，即如果 $k_\nu(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1})=1$ 或 2，那么，这一玩家预计将通过他的 σ_ν 选择来最大化或最小化 $J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)]$，即结果将是 $\mathrm{Max}_{\sigma_\nu}J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)]$ 或 $\mathrm{Min}_{\sigma_\nu}J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)]$。

127 也就是说，对于这一局博弈，在选择 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1}$ 已经做出之后，结果总是

$$M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]。$$

接下来，假设只有（动作 $M_1,\cdots,M_{\nu-2}$ 的）选择 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-2}$ 已经做出，现在有待做出的是（动作 $M_{\nu-1}$ 的）选择 $\sigma_{\nu-1}$。

如我们已经看到的那样，$\sigma_{\nu-1}$ 的一个确定的选择必然带来结果 $M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$，它是 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1}$ 的函数，由于运算 $M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}$ 扼杀 σ_ν，我们能够像上面那样继续下去，只需用 $\nu-1,\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1},M_{\sigma_{\nu-1}}^{k_{\nu-1}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$ 分别替换 $\nu,\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu,M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$。因此，在选择 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-2}$ 做出之后，这一局博弈的结果预计是

$$M_{\sigma_{\nu-1}}^{k_{\nu-1}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})}J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]。$$

类似地，在选择 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-3}$ 之后，这一局博弈的结果预计是 $M_{\sigma_{\nu-2}}^{k_{\nu-2}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-3})} M_{\sigma_{\nu-1}}^{k_{\nu-1}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-2})} M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})} J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$。最后，在这一局博弈开始之前，其结果预计是

$$M_{\sigma_1}^{k_1} M_{\sigma_2}^{k_2(\sigma_1)} \cdots M_{\sigma_{\nu-1}}^{k_{\nu-1}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-2})} M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})} J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]。$$

这正是 15.6.2 中(15:12)的 v。①

15.8.3 15.8.2 中程序的一个反对意见是，求解 Γ 的一局的值的这一方法假定了所有玩家的理性行为，玩家 1 的策略建立在玩家 2 采取最优策略这一假设之上，反之亦然。

具体来说：假设 $k_{\nu-1}(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-2})=1$，$k_\nu(\sigma_1,\cdots,\sigma_{\nu-1})=2$。那么，有着个人动作 $M_{\nu-1}$ 的玩家 1 在做出其选择 $\sigma_{\nu-1}$ 时，设想玩家 2"理性地"做出其个人动作 M_ν 的选择 σ_ν。事实上，这是假设他的 $\sigma_{\nu-1}$ 选择必然导致这一局的结果是 $\mathrm{Min}_{\sigma_\nu} J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$ 即 $M_{\sigma_\nu}^{k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})} J_1[\overline{\pi}(\sigma_1,\cdots,\sigma_\nu)]$ 的惟一借口。(见 15.8.2 中关于 $M_{\nu-1}$ 的讨论。)

在 4.1.2 的第二部分，我们提到过这样一个结论，即必须避免假设他人的"理性"。15.8.2 的观点显然不符合这一要求。 *128*

---

① 在设想将这一程序运用于任何具体博弈时，必须牢记的一点是，我们假设了 Γ 的长度 ν 是固定不变的。如果 ν 实际上是可变的——大多数博弈是这样的(见第 58 页脚注③)，那么，我们必须首先将其弄成一个常数，具体做法是，像 7.2.3 末尾那样，给 Γ 增加"哑动作"。只有这样做了之后，上述回归程序 $(M_\nu,M_{\nu-1},\cdots,M_1)$ 才是可行的。

就实践中的构造来说，这一程序当然不比 15.4—15.6 的程序好。

也许，只有某些极为简单的博弈能够以两种程序得到有效处理，如画"连城"游戏。——127，①

有人会争辩说，在一个二人零和博弈中，一个玩家能够假设对手的理性，因为他的对手的非理性并不能伤害它。事实上，由于只有两个玩家且收益之和为零，一个玩家非理性地遭受的损失必然导致另一个玩家相等数额的收益。[①] 这说明，这一观点远非完美，但可谓相当详尽了。不过，我们不必过于关注其不足之处：我们有 15.4—15.6 中无可挑剔的证明。[②]

但是，对于这一问题的基本方面来说，上述讨论很有可能有着显著意义。我们将看到，它如何影响到我们在 15.8.1 提到的不符合二人零和约束的较一般情况下的修正条件。

16. 直线性和凸性

16.1 几何背景

16.1.1 接下来，我们的任务是为所有二人零和博弈找到一个折中的解，即允许非严格决定的情况。要在这方面取得成功，我们要借用对付严格决定博弈的相同概念：这些概念能够被推广到所有二人零和博弈。为此，我们不得不用到概率理论（见 17.1 和 17.2）。而且，一些不常用

① 如果总收益之和不为零，或不止两个玩家，那么，情况就不是这样。详细讨论见 20.1、24.2.2 和 58.3。——128，①

② 这方面，尤其见 14.5.1 中的（14:D:a）、（14:D:b）、（14:C:d）、（14:C:e）和 14.5.2 中的（14:C:a）、（14:C:b）。——128，②

的数学工具也是必需的。我们在第 13 节中的分析提供了部分这类工具；关于其余工具，最方便的做法是借助于有关直线性和凸性的数学理论。关于凸体[①]的两个定理将有着特别显著的意义。

出于这些理由，我们接下来讨论直线性和凸性的概念。

16.1.2 没有必要对 n 维线性（欧几里得）空间的概念进行基本的讨论，我们只需说这一空间是由 n 个数字坐标描述的。相应地，对于 $n=1,2,\cdots$，我们把 n 维线性空间 L_n 定义为所有 n 维实数 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的集合。这些 n 维实数也能够被看作变量 i 的函数 x_i，其定义域是 13.1.2 和 13.1.3 意义上的 $(1,\cdots,n)$。[②] 为保持一致性，我们将称 i 为一个指数，而不称其为一个变量。不过，这并不改变这些情况的本质。尤其是，我们有 129

$$\{x_1,\cdots,x_n\}=\{y_1,\cdots,y_n\},$$

当且仅当 $x_i=y_i$，$i=1,\cdots,n$（见 13.1.3）。你甚至可以这样认为：L_n 是最简单的（数值）函数空间，其中，定义域是一个固定的有限集——集合 $(1,\cdots,n)$。[③]

我们也称这些 n 维实数或函数为 L_n 的点或向量，并写成

---

① 见伯尼森（T. Bonessen）和芬切尔（W. Fenchel）：Theorie der konvexen Körper, in Ergebisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete，第 III/1 卷，柏林，1934。进一步研究，见外尔（H. Weyl）：Eloeentare Theorie der konvexen Polyeder. Commtarii Mathematici Helvetici，第 VII 卷，1935，第 290—306 页。——128，③

② 也就是说，这些 n 维数 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 并不是 8.2.1 意义上的集合。借助指数 $i=1,\cdots,n$，x_i 的进行的实际枚举恰恰就像它们的值的综合那样基本。类似情况见第 69 页脚注④。——129，①

③ 在现代分析中，很多人有这种倾向。——129，②

(16:1) $\vec{x} = \{x_1, \cdots, x_n\}$。

对于特定的 $i=1,\cdots,n$——函数 x_i 的取值是向量 $\vec{x}$ 的分量。

16.1.3 我们提到过，L_n 不是一个抽象的欧几里得空间，而是一个参照系（坐标系或参照标架）已经被选定的空间。① 不过，对于我们的进一步讨论，这并不是基本的。这归于指定 L_n 的数字原点和坐标向量的可能性（见下面）。但是，我们并不想强调问题的这一方面。

L_n 的零向量或原点是

$$\vec{O} = \{0, \cdots, 0\}$$

L_n 的 n 个坐标向量是

$$\vec{\delta} = \{0, \cdots, 1, \cdots, 0\} = \{\delta_{1j}, \cdots, \delta_{nj}\}, \qquad j = 1, \cdots, n,$$

其中，

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \text{②③} \\ 0 & i \neq j。\end{cases}$$

有了这些约定之后，我们就能够描述 L_n 中向量的性质了。

16.2 向量运算

16.2.1 涉及向量的主要运算有：纯量乘法，即一个
130 向量 $\vec{x}$ 被一个数 t 乘；向量加法，即两个向量相加。这两个运算是由问题中向量的分量的相应运算定义的。更确

① 这至少是一种正统的几何观点。——129，③

② 因此，零向量的所有分量都是 0，而坐标向量只有一个分量不是 0，不是 0 的那个分量等于 1，且第 j 个坐标向量的第 j 个分量为 1。——129，④

③ δ_{ij} 是“克罗内克符号”，它在很多方面都相当有用。——129，⑤

切地说：

纯量乘法：

$$t\{x_1,\cdots,x_n\}=\{tx_1,\cdots,tx_n\}。$$

向量加法：

$$\{x_1,\cdots,x_n\}+\{y_1,\cdots,y_n\}=\{x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n\}。$$

这些代数运算是如此简单和明显，无需讨论。不过，我们要指出，它们允许任何向量 $\vec{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 借助于其分量和 L_n 的坐标向量表达为

$$\vec{x}=\sum_{j=1}^{n}x_j\vec{\delta}_{ij}。①$$

L_n 的一些重要子集：

(16:A:a)　　考虑一个(线性，非齐次)方程

(16:2:a)　　$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=b$

($a_1,\cdots,a_n,b$ 是常数)。我们排除

$$a_1=\cdots=a_n=0$$

的情况，因为那样的话就没有方程了。所有满足上述方程的点(向量) $\vec{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 形成一个超平面。②

(16:A:b)　　给定一个超平面

(16:2:a)　　$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=b,$

它定义了 L_n 的两个部分。它将 L_n 分为两个部分：

---

① x_j 是数，从而它们在 $x_j\vec{\delta}_{ij}$ 中是一个纯量乘数。$\sum_{j=1}^{n}$ 是向量求和。——130，①

② 例如，对于 $n=3$，即普通的(三维欧几里得)空间，它们恰好是(二维)平面。在我们的一般情况中，它们是 $(n-1)$ 维相似体。故，称之为超平面。——130，②

(16:2:b) $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i > b,$$

(16:2:c) $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i < b。$$

这两者是由上述超平面产生的两个半空间。

131 注意，如果我们用 $-a_1,\cdots,-a_n,-b$ 分别替换 $a_1,\cdots,a_n,b$，那么，超平面(16:2:a)不受影响，但两个半空间(16:2:b)和(16:2:c)被交换。因此，我们总是可以假设一个半空间有(16:2:b)那样给定的形式。

(16:A:c) 给定两个点(向量) $\vec{x},\vec{y}$ 和 $t\geqq 0$ 且 $1-t\geqq 0$；那么，分别拥有重量 t 和 $1-t$ 的 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 的力学意义上的重心是 $t\vec{x}+(1-t)\vec{y}$。

方程

$$\vec{x}=\{x_1,\cdots,x_n\},\quad \vec{y}=\{y_1,\cdots,y_n\},$$

$$t\vec{x}+(1-t)\vec{y}=\{tx_1+(1-t)y_1,\cdots,tx_n+(1-t)y_n\}$$

应该能够使这一点充分清楚。

L_n 中所有的点的重心组成 L_n 的一个子集 C，即对于任意 x,y 和 $0\leqq t\leqq 1$，C 包含 $t\vec{x}+(1-t)\vec{y}$。C 是一个凸集。

读者将会注意到，对 $n=2,3$，即在普通平面和空间中，这是常见凸性的概念。事实上，所有点 $t\vec{x}+(1-t)\vec{y}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ 的集合正是连接 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 的(直)线段，即区间 $[\vec{x},\vec{y}]$。因此，一个凸集是这样一个集合，对于其中任意两个点 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$，区间 $[\vec{x},\vec{y}]$ 也在其内。图 16 描述的是 $n=2$ 即平面中的情况。

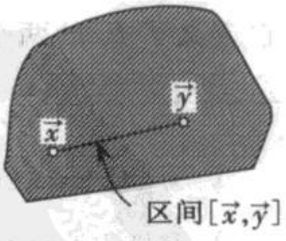
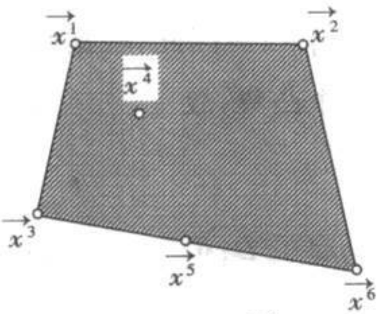


图 16

16.2.2 显然，任意多个凸集的交集也是一个凸集。因此，如果给定任意个数的点（向量）$\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^p$，存在一个包含它们的最小凸集：包含 $\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^p$ 的所有凸集的交。这是由 $\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^p$ 生成的凸集。想像 $n=2$（平面）的情况同样是有益的。见图 17，其中，$p=6$。不难证明，这个集合由如下点（向量）组成：



阴影区域：由 $\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^6$ 生成的凸体

图 17

(16:2:d)　$\sum_{j=1}^{p} t_j\,\vec{x}^j,\ t_1\geqq 0,\cdots,t_p\geqq 0$ 且 $\sum_{j=1}^{p} t_j=1$。

证明：满足(16:2:d)的点组成一个包含所有 $\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^p$ 的集合。$\vec{x}^j$ 是这样一个点：令 $t_j=1$ 且所有其他 $t_i=0$。

满足(16:2:d)的点组成一个凸集：如果 $\vec{x}=\sum_{j=1}^{p} t_j\,\vec{x}^j$ 且 $\vec{y}$ 132
$=\sum_{j=1}^{p} s_j\,\vec{x}^j$，那么，$t\vec{x}+(1-t)\vec{y}=\sum_{j=1}^{p} u_j\,\vec{x}^j,\ u_j=tt_j+(1-t)s_j$。

任何一个包含 $\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^p$ 的凸集 D 也包含所有满足(16:2:d)的点：我们用归纳法证明这一点。

证明：对于 $p=1$，这是显然的。这是因为，这时 $t_1=1$ 且 $\vec{x}^1$ 是满足(16:2:d)的惟一一个点。

假设 $p-1$ 时，上述结论成立。考虑 p 本身。如果 $\sum_{j=1}^{p-1} t_j=0$，那么，$t_1=\cdots=t_{p-1}=0$，满足(16:2:d)的点是 $\vec{x}^p$，并属于 D。如果 $\sum_{j=1}^{p-1} t_j>0$，那么，令 $t=\sum_{j=1}^{p-1} t_j$，从而 $1-t=\sum_{j=1}^{p} t_j-\sum_{j=1}^{p-1} t_j=t_p$。因此，$0<t\leqq 1$。令 $s_j=t_j/t,\ j=1,\cdots,p-1$。故，

$\sum_{j=1}^{p-1} s_j = 1$。因此，根据我们对 $p-1$ 的假设，$\sum_{j=1}^{p-1}$ 属于 D。D 是一个凸集，故

$$t\sum_{j=1}^{p-1} s_j \vec{x^j} + (1-t)\vec{x^p}$$

也属于 D；但是，这一向量等于

$$\sum_{j=1}^{p-1} t_j \vec{x^j} + t_p \vec{x^p} = \sum_{j=1}^{p} t_j \sum_{j=1}^{p} t_j \vec{x^j}$$

所以，它属于 D。

133 证明完毕。

(16:2:d)中的 $t_1,\cdots,t_p$ 本身可以被看作空间 L_p 中向量 $\vec{t}=\{t_1,\cdots,t_p\}$ 的分量。因此，我们应该给予满足如下条件的 $\vec{t}$ 组成的集合一个名称：

$$t_1 \geqq 0,\cdots,t_p \geqq 0,$$

且

$$\sum_{j=1}^{p} = 1。$$

我们将这一集合记为 S_p。我们还应该给予仅由上述条件中的第一个条件——即 $t_1 \geqq 0,\cdots,t_p \geqq 0$——描述的集合一个名称。我们将其记为 P_p。两者都是凸集。

让我们图示 $p=2$（平面）和 $p=3$（空间）的情况。P_2 是正象限，位于正 x_1 轴和正 x_2 轴之间的区域（图 18）。P_3 是正卦限，位于正的 x_1、x_2 和 x_3 轴之间的空间，即正 x_1,x_2、正 x_1,x_3 与正 x_2,x_3 三个平面象限界定的空间（图 19）。S_2 是与 P_2 相交的一条线段（图 18）。S_3 是一个平面三角，看似与 P_3 相交（图 19）。一个有用的做法是将 S_2 和 S_3 单独

134 画出来，不将其自然地镶嵌在 P_2、P_3（或甚至 L_2、L_3）之内

(图 20,图 21)。在这些图中,我们指出了分别与 x_1、x_2 或 x_1、x_2、x_3 成比例的距离。

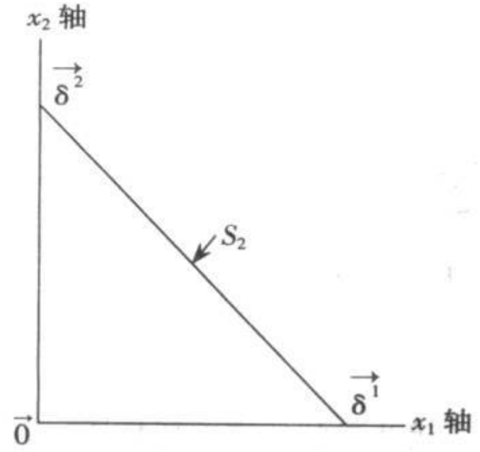


图 18

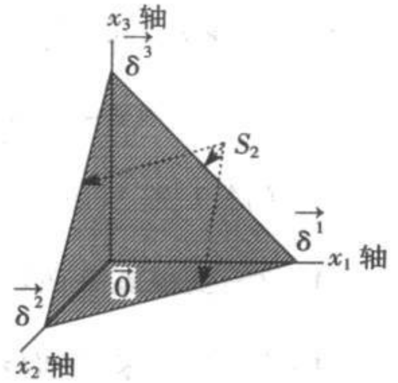


图 19

(我们再次强调:图 20 和图 21 中标明的距离 x_1、x_2、x_3 不是坐标 x_1、x_2、x_3 本身。它们位于 S_2 或 S_3 之外的 L_2 或 L_3 之内,从而无法在 S_2 或 S_3 中描述,不过,不难看出,它们是与那些坐标成比例的。)

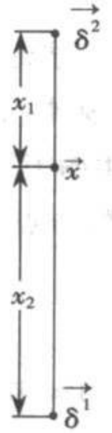


图 20

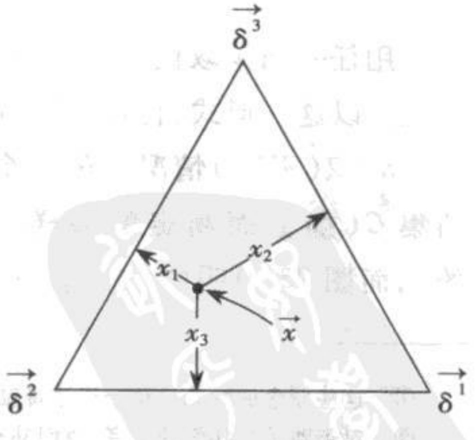


图 21

16.2.3 另外一个重要概念是向量的长度。$\vec{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的长度是

$$|\vec{x}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}。$$

两个点(向量)之间的距离是它们的差的长度

$$|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}。$$

因此,$\vec{x}$ 的长度是从原点$\vec{0}$到它的距离。①

16.3 支撑超平面定理

16.3 接下来,我们要证明凸集的一个重要性质:

(16:B) 给定 p 个向量 $\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^p$,那么,一个向量 $\vec{y}$ 要么属于由 $\vec{x}^1,\cdots,\vec{x}^p$ 生成的凸集 C[见16.2.1中的(16:A:c)],要么存在一个包含 $\vec{y}$ 的超平面[见 16.2.1 中的(16:2:a)],使得整个 C 属于由这一超平面产生的一个半空间[如 16.2.1 中的(16:2:b);见(16:A:b)]。

用任一凸集取代由 $\vec{x}^1,\cdots \vec{x}^p$ 生成的凸集,这一结论仍然成立。以这一形式,它是现代凸集理论中的一个基本工具。

$n=2$(平面)情况下的一个图示:图 22 使用图 17 中的凸集 C(如上面断定的那样,它是由有限个数的点生成的),而图 23 说明的是一个一般的凸集 C。②

---

① 这些概念的欧几里得一毕达哥拉斯含义是直接的。——134,①

② 对于熟悉拓扑学的读者,我们补充如下:要想严格,这个句子应该进一步修饰——这是对封闭凸集而言的。这保证我们在下面的证明中使用的最小值的存在性。关于这些概念,见第 384 页脚注①。——134,②

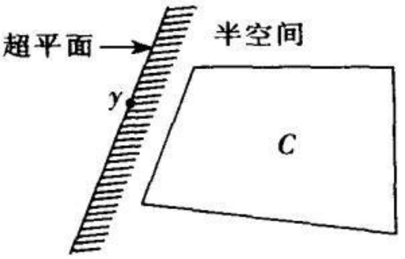


图 22

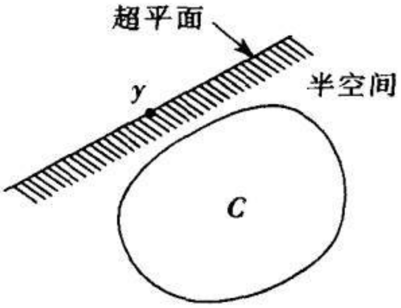


图 23

在证明(16:B)之前,我们注意到,第二种可能性明显排除了第一种可能性,因为 $\vec{y}$ 属于该超平面,因此不属于上面提到的半空间。[也就是说,它满足(16:2:a)而不满足(16:A:b)中的(16:2:b)。]

下面,我们给出证明:

证明:假设向量 $\vec{y}$ 不属于 C。那么,给定 C 中的一个点 $\vec{z}$,这一点尽可能接近 $\vec{y}$,即

$$|\vec{z}-\vec{y}|^2=\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2$$ 135

取其最小值。

考虑 C 中另一个向量 $\vec{u}$。那么,对每一 t, $0\leqq t\leqq 1$, $t\vec{u}+(1-t)\vec{z}$ 也属于凸集 C。由 $\vec{z}$ 的最小值性质(见上),故

$$|t\vec{u}+(1-t)\vec{z}-\vec{y}|^2\geqq|\vec{z}-\vec{y}|^2,$$

即

$$|(\vec{z}-\vec{y})+t(\vec{u}-\vec{z})|^2\geqq|\vec{z}-\vec{y}|^2,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\{(z_i-y_i)+t(u_i-z_i)\}^2\geqq\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2$$

根据初等代数,这意味着

$$2\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-z_i)t+\sum_{i=1}^{n}(u_i-z_i)^2t^2\geqq 0。$$

136 因此，对于 $t>0$（当然 $t\leqq 1$），我们甚至有

$$2\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-z_i)+\sum_{i=1}^{n}(u_i-z_i)^2t\geqq 0。$$

如果 t 收敛于0，那么，等式左边收敛于 $2\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-z_i)$。因此，

(16:3) $$\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-z_i)\geqq 0。$$

因为 $u_i-y_i=(u_i-z_i)+(z_i-y_i)$，这意味着

$$\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-y_i)\geqq\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2=|\vec{z}-\vec{y}|^2。$$

现在，$\vec{z}\neq\vec{y}$（因为 $\vec{z}$ 属于 C，而 $\vec{y}$ 不属于 C），因此，$|\vec{z}-\vec{y}|^2>0$。故，等式左边 >0。即

(16:4) $$\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)u_i>\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)y_i。$$

令 $a_i=z_i-y_i$，那么，因 $\vec{z}\neq\vec{y}$ 排除了 $a_1=\cdots=a_n=0$（见上）。令 $b=\sum_{i=1}^{n}a_iy_i$。因此，

(16:2:a*) $$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=b$$

定义一个超平面，而 $\vec{y}$ 显然属于它。接下来

(16:2:b*) $$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i>b$$

是这个超平面产生的一个半空间，而且，(16:4) 恰恰说明，$\vec{u}$ 属于这个半空间。

由于 $\vec{u}$ 是 C 中任一向量，这就完成了证明。

上述代数证明也可以用几何术语陈述。

让我们首先就 $n=2$（平面）的情况进行说明。这一情
况如图 24 所示：$\vec{z}$ 是 C 中一个点，它是 C 中与给定的点 $\vec{y}$
最近的点，即 $\vec{y}$ 与 $\vec{z}$ 之间的距离 $|\vec{z}-\vec{y}|$ 取其最小值。由于
$\vec{y}$，$\vec{z}$ 是固定不变的，且 $\vec{u}$ 是（C 中）一个可变的点，因此， 137
（16:3）定义一个超平面和一个由这一超平面产生的半空
间。而且，不难证明，$\vec{z}$ 属于这一超平面，且它由这样一些 $\vec{u}$
组成：这三个点组成的角是一个直角（即 $\vec{z}-\vec{y}$ 与 $\vec{u}-\vec{z}$ 正相
交）。这意味着，$\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)(u_i-z_i)=0$。显然，整个 C 要
么落在这个超平面上，要么落在它的一侧，并与 $\vec{y}$ 有一定距
离。如果 C 的某一个点 $\vec{u}$ 落在 $\vec{y}$ 的一侧，那么，区间 $[\vec{z},\vec{u}]$
中的某个点就会比 $\vec{z}$ 更接近 $\vec{y}$。（第 25 节第 135—136 页的
计算经适当解释恰恰说明了这一点。）由于 C 包含 $\vec{z}$ 和 $\vec{u}$，故
包含区间 $[\vec{z},\vec{u}]$，这与 $\vec{z}$ 是 C 中与 $\vec{y}$ 最近的点的假设矛盾。

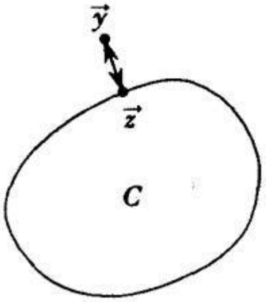


图 24

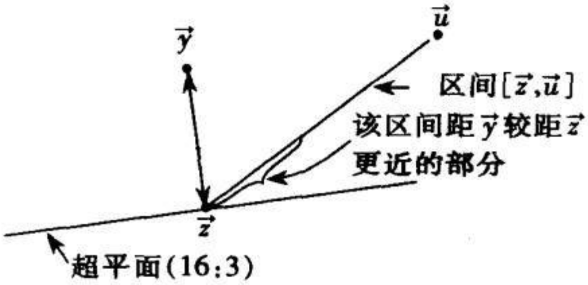


图 25

从（16:3）到（16:4）相当于超平面 $\vec{z}$ 向超平面 $\vec{y}$ 的平
移（因为 u_i 的系数 $a_i=z_i-y_i$，$i=1,\cdots,n$ 没有被改变）。 138
现在，$\vec{y}$ 就落在这一超平面上，且整个 C 属于由它产生的
一个半空间（见图 26）。

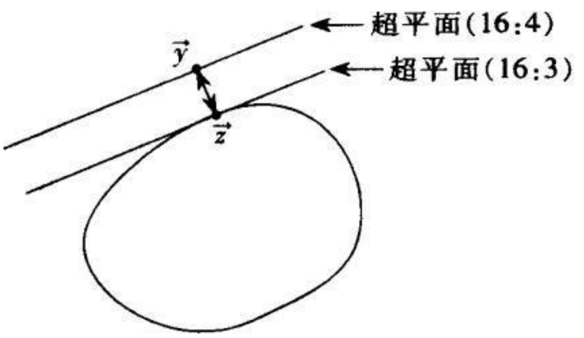


图 26

我们可以类似方式想像 $n=3$(空间)的情况。

我们甚至有可能以这种几何的方式思考 n 维空间。如果读者能够劝说自己有着 n 维“几何直觉”,那么,他就可以认为上面的证明在 n 维空间同样成立。甚至有可能通过以下说明来避免这一点:无论 n 是几,整个证明每次仅仅涉及三个点,即 $\vec{y}$、$\vec{z}$、$\vec{u}$。用三个给定的点确定一个(二维)平面总是可能的。如果只考虑这一平面内的事情,那么,图 24 至图 26 以及相关说明能够不加解释地被使用。

上面的纯粹代数证明总是绝对严格的。我们给出几何类比的主要目的是帮助理解证明过程中的代数运算。

16.4 矩阵择一定理

16.4.1 16.3 的定理(16:B)有一个推论。它在我们随后的研究中是很基本的。

我们从考虑一个矩阵开始,这一矩阵有 n 行,m 列,其元素是 $a(i,j)$。(见 13.3.3 中的图 11。那里的 φ、x、y、t、s 对应着我们这里的 a、i、j、n、m。)也就是说,$a(i,j)$ 是变量 $i=1,\cdots,n$ 和变量 $j=1,\cdots,m$ 的一个随便的函数。接下

来，我们建立 L_n 中的如下向量：对于每一个 $j=1,\cdots,m$，向量 $\vec{x^j}=\{x_1^j,\cdots,x_n^j\}$，其中，$x_i^j=a(i,j)$；对于每一 $l=1,\cdots,n$，坐标向量 $\vec{\delta}=\{\delta_{il}\}$。（关于后者，见 16.1.3 末尾；我们用 l 替换了那里的 j。）让我们将 16.3 中的定理（16:B）运用于 $p=n+m$ 个向量 $\vec{x^1},\cdots,\vec{x^m},\vec{\delta^1},\cdots,\vec{\delta^n}$。（它们取代那里的 $\vec{x^1},\cdots,\vec{x^p}$。）我们令 $\vec{y}=\vec{0}$。

由 $\vec{x^1},\cdots,\vec{x^m},\vec{\delta^1},\cdots,\vec{\delta^n}$ 产生的凸集 C 可以包含 $\vec{0}$。如果情况是这样，那么，我们就能够从 16.2.2 中的（16:2:d）得出

$$\sum_{j=1}^{m} t_j\,\vec{x^j}+\sum_{l=1}^{n} s_l\,\vec{\delta^l}=\vec{0},$$

其中

(16:5)　　$t_1\geqq 0,\cdots,t_m\geqq 0,s_1\geqq 0,\cdots,t_n\geqq 0$。

(16:6)　　$\sum_{j=1}^{m} t_j+\sum_{l=1}^{n} s_l=1$。

用 $t_1,\cdots,t_m,s_1,\cdots,t_n$ 替换 $t_1,\cdots,t_p$（见上）。用分量描述，这意味着 139

$$\sum_{j=1}^{m} t_j a(i,j)+\sum_{l=1}^{n} s_l\delta_{il}=0。$$

等式左边的第二项等于 s_i，因此，我们写

(16:7)　　$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)\,t_j=-s_i$。

如果我们有 $\sum_{j=1}^{m} t_j=0$，那么，$t_1=\cdots=t_m=0$，从而，由（16:7）$s_1=\cdots=s_n=0$，这与（16:6）矛盾。故 $\sum_{j=1}^{m} t_j>0$。我们得到了（16:7）的一个推论：

(16:8) $$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)t_j \leqq 0。$$

令 $x_j = t_j \Big/ \sum_{j=1}^{m} t_j, j = 1, \cdots, m$。那么，我们有 $\sum_{j=1}^{m} x_j$ 且(16:5)给出 $x_1 \geqq 0, \cdots, x_m \geqq 0$。故，

(16:9) $\vec{x} = \{x_1, \cdots, x_m\}$ 属于 S_m

且(16:8)给出

(16:10) $$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)x_j \leqq 0, \qquad i = 1, \cdots, n。$$

另一方面，考虑 C 不包含 $\vec{0}$ 这一可能性。那么，定理 16.3 的(16:B)允许我们推断一个包含 $\vec{y}$ 的超平面的存在性[见16.2.1中的(16:2:a)]，使得整个 C 属于由这个超平面产生的一个半空间[见 16.2.1 中的(16:2:b)]。记这个超平面为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b。$$

由于 $\vec{0}$ 属于它，故 $b = 0$。因此，问题中的半空间是

(16:11) $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i > b。$$

140 $\vec{x}^1, \cdots, \vec{x}^m, \vec{\delta}^1, \cdots, \vec{\delta}^n$ 属于这个半空间。对于 $\vec{\delta}^l$，(16:11)变成 $\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{il} > 0$，即 $a_l > 0$。这样，我们有

(16:12) $$a_1 > 0, \cdots, a_n > 0。$$

对于 $\vec{x}^j$，(16:11)变成

(16:13) $$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)a_i > 0。$$

令 $w_i = a_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} a_i, i = 1, \cdots, n$。那么，我们有 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ 且

(16:12)给出 $w_1>0,\cdots,w_n>0$。故

(16:14)　　$\vec{w}=\{w_1,\cdots,w_n\}$ 属于 S_n。

且(16:13)给出

(16:15)　　$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)w_i>0, j=1,\cdots,m$。

总结(16:9)、(16:10)、(16:14)和(16:15)，我们可以说：

(16:C)　　给定一个 n 行 m 列矩阵，记这一矩阵的元素为 $a(i,j)$，$i=1,\cdots,n$；$j=1,\cdots,m$，那么，要么 S_m 中存在一个向量 $\vec{x}=\{x_1,\cdots,x_m\}$ 满足

(16:16:a)　　$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)x_j \leqq 0,\quad i=1,\cdots,n,$

要么 S_n 中有一个向量 $\vec{w}=\{w_1,\cdots,w_n\}$ 满足

(16:16:b)　　$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)x_j \leqq 0,\quad j=1,\cdots,m$。

另外，我们还看到：

(16:16:a)与(16:16:b)是相互排斥的。

证明：假设(16:16:a)和(16:16:b)同时成立。分别用 w_i 乘(16:16:a)中的每一不等式并加总，$i=1,\cdots,n$。这给出

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a(i,j)w_i x_j \leqq 0。$$

用 x_j 乘(16:16:b)并加总，$j=1,\cdots,m$。这给出 141

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a(i,j)w_i x_j > 0。$$①

这样，我们得到了一个矛盾。

---

① >0，而不只是≧0。事实上，=0 会要求 $x_1=\cdots=x_m=0$。这是不可能的，因为 $\sum_{j=1}^{m}=1$。——141，①

16.4.2 我们将矩阵 $a(i,j)$ 换成其负转置矩阵，即我们用 $i=1,\cdots,n$ 记行（而不像原来那样是列）；用 $j=1,\cdots,m$ 记其列（而不像原来那样是行）。令这一矩阵的元素为 $-a(i,j)$［而不是原来的 $a(i,j)$］。（因此，n,m 也被交换了。）

对这一新的矩阵，我们重述 16.4.1 中的最终结果。但在表述中，我们用 $\vec{x}'=\{x'_1,\cdots,x'_m\}$ 替换 $\vec{w}=\{w_1,\cdots,w_n\}$，用 $\vec{w}'=\{w'_1,\cdots,w'_n\}$ 替换 $\vec{x}=\{x_1,\cdots,x_m\}$。而且，我们用原来的矩阵术语陈述结果。

那么，我们有：

(16:D) 给定一个 n 行 m 列矩阵。记其元素为 $a(i,j)$，$i=1,\cdots,n$；$j=1,\cdots,m$。那么，要么 S_m 中存在一个向量 $\vec{x}'=\{x'_1,\cdots,x'_m\}$ 满足

(16:17:a) $$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)x'_j<0,\quad i=1,\cdots,n,$$

要么 S_n 中存在一个向量 $\vec{w}'=\{w'_1,\cdots,w'_n\}$ 满足

(16:17:b) $$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)w'_i\geqq 0,\quad j=1,\cdots,m。$$

而且两者是相互排斥的。

16.4.3 现在，我们把 16.4.1 和 16.4.2 中的结果结合起来。它们意味着，我们必定有 (16:17:a)，或 (16:16:b)，或 (16:16:a) 且 (16:17:b)。还有，这三种可能性是相互排斥的。

用同一个矩阵 $a(i,j)$，对于 16.4.1 和 16.4.2 中的向量 $\vec{x}'$、$\vec{x}$、$\vec{w}$、$\vec{w}'$，我们写 $\vec{x}$、$\vec{w}$、$\vec{x}'$、$\vec{w}'$，我们有：

(16:E)　要么 S_m 中存在一个向量 $\vec{x}=\{x_1,\cdots,x_m\}$ 满足 142

(16:18:a)
$$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)x_j<0,i=1,\cdots,n,$$

要么 S_n 中存在一个向量 $\vec{w}=\{w_1,\cdots,w_n\}$ 满足

(16:18:b)
$$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)x_i>0,j=1,\cdots,m,$$

要么 S_m 中的向量 $\vec{x'}=\{x'_1,\cdots,x'_m\}$ 和 S_n 的向量 $\vec{w'}=\{w'_1,\cdots,w'_n\}$ 满足

(16:18:c)
$$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)x'_j\leqq 0,i=1,\cdots,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)w'_i\geqq 0,j=1,\cdots,m。$$

(16:18:a)、(16:18:b)和(16:18:c)相互排斥。

一方面，(16:18:a)与(16:18:c)结合，另一方面(16:18:b)与(16:18:c)结合，我们得到下述较简单但弱一些的结果。①②

(16:F)　要么 S_m 中存在一个向量 $\vec{x}=\{x_1,\cdots,x_m\}$ 满足

(16:19:a)
$$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)x_j\leqq 0,i=1,\cdots,n,$$

---

① (16:19:a)、(16:19:b)两者并不相互排斥：它们的交正好是(16:18:c)。——142,①

② 这一结果本来可以直接从 16.4.1 的最终结果得到：(16:19:a)恰好是(16:16:a)，且(16:19:b)是(16:16:b)的弱形式。我们给出上述详细讨论，是因为它能够使我们更好地认识整体情况。——142,②

要么 S_n 中存在一个向量 $\vec{w}=\{w_1,\cdots,w_n\}$ 满足

(16:19:b) $$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)w_i \geqq 0, j=1,\cdots,n。$$

16.4.4 考虑一个斜对称矩阵 $a(i,j)$，即该矩阵与 16.4.2 意义上的负转置矩阵相同，即 $n=m$ 且

$$a(i,j) = -a(j,i), i,j=1,\cdots,n。$$

143 如此一来，16.4.3 中的条件(16:19:a)和(16:19:b)表达的是如下相同事情：事实上，(16:19:b)是

$$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)w_i \geqq 0;$$

这可以被写成

$$-\sum_{i=1}^{n} a(j,i)w_i \geqq 0, \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^{n} a(j,i)w_i \leqq 0。$$

我们只需将 i,j 写成 j,i①，从而变成了$\sum_{j=1}^{n} a(i,j)w_j \leqq 0$。然后，用 $\vec{x}$ 替换 $\vec{w}$，我们有$\sum_{j=1}^{n} a(i,j)x_j \leqq 0$。这正是(16:19:a)。

因此，我们可以用它们中的任一个——如(16:19:b)——替换(16:19:a)和(16:19:b)的析取。这样，我们有：

(16:G) 如果矩阵 $a(i,j)$ 是一个斜对称矩阵(从而 $n=m$，见上)，那么，S_n 中存在一个向量 $\vec{w}=\{w_1,\cdots,w_n\}$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} a(i,j)w_i \geqq 0, \quad j=1,\cdots,n。$$

---

① 注意，由于 $n=m$，这只不过是符号变化而已！——143，①

17. 混合策略:全部博弈的解

17.1　两个基本例子

17.1.1　为了克服我们在 14.7 中看到的非严格决定情况中的困难,我们要重新思考这一现象的最简单例子:"硬币配对"和"石头、剪子、布"游戏(见 14.7.2,14.7.3)。关于这些博弈的这类"问题",存在着经验和常识性的态度,所以,我们有希望通过观察和分析这些态度来得到非严格决定(非零和)博弈的解的一些线索。

"硬币配对"博弈中,不存在一个优于其他玩法的特殊玩法,即出"正面"不比出"反面"好,出"反面"也不比出"正面"好,关键是发现对手的意图。这似乎堵死了通向一个解的出路,因为博弈规则明确禁止每位玩家在做出自己的选择时知道对手的行动。不过,上述观察并不完全符合实际。在与一个有一定才智的对手玩"硬币配对"游戏时,玩家将不会试图去发现对手的意图,而是专心于避免自己的意图不被发现,即在多次游戏中无规律地出"正面"和"反面"。由于我们只描述一次博弈,我们必须讨论的是一次博弈的过程,而不是一系列博弈的过程,我们倾向于如下描述:玩家的策略并非由出"正面"或出"反面"组成,而是由以 0.5 的概率出"正面"和以 0.5 的概率出"反面"组成。 144

17.1.2　我们可以这样想:为了以理性的方式玩"硬

币配对"游戏，这个玩家在每次玩之前决定按 50:50 之类的概率随机地出"正面"或"反面"。[①] 重要的是，这一方法保证他不会输。事实上，无论对手的策略是什么，这一博弈的结果的数学期望都是零。[②] 当对手肯定出"正面"或肯定出"反面"时，这尤为正确。而且，当他的对手像他一样按照确定的概率出"正面"或"反面"时，上述说法也正确。[③]

因此，如果我们允许一个玩家在"硬币配对"中使用"统计"策略，即按照(由他自己选定的)确定的概率把各种玩法混合起来，那么，他就能够保证自己不输。事实上，我们为他指定了一个策略，使用这一策略，无论对手如何玩，他都不会输。对于他的对手来说，同一说法也是正确的，即他的对手也能够使用一个统计策略，无论他如何玩，他的对手都不会输。[④]

读者将会看到，这与 14.5 中的讨论十分相似。[⑤] 根据那里的讨论，我们会理所当然地认为一次"硬币配对"的值是 0，"正面"和"反面"50:50 这一统计混合是一个好的

---

① 例如，他可以先投掷一枚骰子——当然不让对手看到结果，如果点数是偶数，那么，出"正面"，如果点数是奇数，那么，出"反面"。——144，①

② 也就是说，他胜的概率等于输的概率，因为在这种条件下，无论对手采取什么行动，对上的概率和没有对上的概率都是 0.5。——144，②

③ 如 $p, 1-p$。对于我们考虑的那个玩家，我们使用概率 0.5，0.5。——144，③

④ 从统计意义上说，这个玩家不会输的意思是，他输的概率≤他赢的概率；他不会赢则意味着，前者≥后者。实际中，每个玩家都会输或赢，因为"硬币配对"不可能无胜负。——144，④

⑤ 我们尤其指 14.5.1 中的(14:C:d)和(14:C:e)。——144，⑤

策略。

在"石头、剪子、布"游戏中的情况大体也是这样。常识告诉我们，好的玩法是各个备择出现的概率都是$\frac{1}{3}$。①像上例那样，我们能够设想一次博弈的值以及好的策略。② 145

17.2 上述观点的推广

17.2.1 一个看似合理的做法是，我们把在"硬币配对"游戏和"石头、剪子、布"游戏中发现的结果推广到所有二人零和博弈。

我们使用博弈的正规型，两个玩家的可能选择是 $\tau_1 = 1, \cdots, \beta_1$ 和 $\tau_2 = 1, \cdots, \beta_2$，与前面一样，玩家 1 的结果是 $H(\tau_1, \tau_2)$。我们不再假设严格决定性。

让我们重复 17.1 中的成功做法，即我们设想有两位玩家，他们的博弈"理论"不是由确定的策略选择组成，而是由按一定概率选择若干策略组成。③ 因此，玩家 1 要选择的不是一个数 $\tau_1 = 1, \cdots, \beta_1$——即相应策略 $\sum_1^{\tau_1}$，而是

① 像前面那样，我们可以在这里引入一个机会装置，脚注①中提到的骰子就是可能的一个。例如，如果点数是 1 或 2，这个玩家就出"石头"；如果点数是 3 或 4，他就出"剪子"；如果点数是 5 或 6，他就出"布"。——144，⑥

② "石头、剪子、布"游戏中有和局，但不输仍然意味着输的概率≤赢的概率，且不赢意味相反的情况。见第 144 页脚注④。——145，①

③ 对于所有策略，这些概率的相等（如上两例中$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$或$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$）是偶然的！不难理解，这归因于这些博弈中的不同备择以对称的方式出现。从此以后，我们假设概率在一个策略的描述中的出现将是基本的事情，其具体取值视具体情况而定。——145，②

β_1 个数 $\xi_1,\cdots,\xi_{\beta_1}$，它们分别是策略 $\sum_1^1,\cdots,\sum_1^{\beta_1}$ 的概率。同样，玩家 2 要选择的不是一个数 $\tau_2=1,\cdots,\beta_2$——即其相应策略 $\sum_2^{\tau_2}$，而是 β_2 个数 $\eta_1,\cdots,\eta_{\beta_2}$，它们分别是策略 $\sum_2^1,\cdots,\sum_2^{\beta_2}$ 的概率。作为不相交且穷尽的备择的概率，ξ_{τ_1}，η_{τ_2} 满足

(17:1:a) $\qquad \xi_{\tau_1}\geqq 0,\quad \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\xi_{\tau_1}=1;$

(17:1:b) $\qquad \eta_{\tau_2}\geqq 0,\quad \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}\eta_{\tau_2}=1$。

别无其他。

我们构造向量 $\vec{\xi}=\{\xi_1,\cdots,\xi_{\beta_1}\}$，$\vec{\eta}=\{\eta_1,\cdots,\eta_{\beta_2}\}$。上述条件表明，按照 16.2.2 的说法，$\vec{\xi}$ 必定属于 S_{β_1} 且 $\vec{\eta}$ 必定属于 S_{β_2}。

如上所述，在这些结构中，一位玩家并不选择他的策略，而是使用所有可能的策略，他要选择的是利用这些策略进行博弈的概率。在一定程度上，这一推广也遇到了非严格决定情况中的主要困难：我们看到，这种情况的特征是，对于每位玩家来说，自己的意图被对手发现总是不利的。①
146 因此，在这种情况下，一位玩家的一个重要考虑是防止自己的意图被对手发现。② 以一定的概率随机地使用不同策略进行博弈，就能够在一定程度上有效地保护自己：借助这种办法，对手无法确定这个玩家的策略将会是

① 14.7.1 的 $\Delta>0$。——145，③

② 但未必仅此一项考虑。——146，①

什么，因为这个玩家自己也不知道。[①] 显然，无知也能够十分有效地防止直接或间接信息泄露。

17.2.2 我们似乎偶尔限制了玩家的行动自由。有可能，他想使用一个确定的策略，排除其他策略；或者，他想按照一定的概率使用某些特定的策略，绝对排除了其余策略。[②]我们强调，这些概率完全在我们的方案之内。一位根本不想使用特定策略的玩家将简单选择其相应概率为 0。一位想使用某一策略、排除其他策略的玩家将选择相应策略的概率为 1，选择其他策略的概率为 0。

因此，如果玩家 1 只想使用策略 $\sum_{1}^{\tau_1}$，他将选择 $\vec{\xi}$ 的坐标向量 $\vec{\delta}^{\tau_1}$（见 16.1.3）。类似，对于玩家 2，有策略 $\sum_{2}^{\tau_2}$ 和向量 $\vec{\eta}$，$\vec{\delta}^{\tau_2}$。

出于这些考虑，我们把 S_{β_1} 中一个向量 $\vec{\xi}$，S_{β_2} 中一个向量 $\vec{\eta}$ 分别称为玩家 1 和玩家 2 的一个**统计策略**或**混合策略**。坐标向量 $\vec{\delta}^{\tau_1}$、$\vec{\delta}^{\tau_2}$ 分别对应着玩家 1 和玩家 2 的原始

---

① 如果对手有足够多的有关这位玩家的“风格”的统计经验，或者他在合理预计这位玩家的行为方面十分聪明，他有可能发现不同策略的概率——频率。（我们无须讨论这是否会发生和如何发生。见 17.3.1 中等讨论。）但是，根据概率和随机性的基本概念，在这种情况下，没有人能够预见具体情况下将会发生什么事情。（零概率例外。见后。）——146，②

② 在这种情况下，他的策略被对手发现的风险变大了。不过，他所考虑的策略也许比其他策略有内在的优越性，从而值得冒这种风险。这样的事情的确会发生，例如，在严格决定情况中“好的”策略的极端形式就是这样。见 14.5，特别是 14.5.2 中的（14：C；a）和（14：C：b）。——146，③

策略τ_1、τ_2——即 $\sum_1^{\tau_1}$、$\sum_2^{\tau_2}$。我们把它们称为严格策略或纯策略。

17.3 上述程序应用于一次具体博弈的理由

17.3.1 至此，读者也许有点心神不安，并且感觉到我们在前面的讨论中同样地强调的两种观点之间的冲突。一方面，我们一直坚持我们的理论是一种静态理论
147 (见 4.8.2)，只分析一局博弈的过程，不分析一个博弈序列(见 17.1)。但是，另一方面，我们又强调策略被对手发现的危险(见 14.4、14.7.1 和 17.2)。如果不进行连续观察，如何发现一位玩家的策略呢？尤其是，如果发现一个使用多种策略的随机混合的玩家呢！我们已经否决了这一观察应该被扩展到多局博弈，即使博弈规则使得这样的观察是可能的，即它们导致一个漫长而重复的博弈，这一观察也只会在博弈的进程中逐步地和相继地实现。在开始的时候，它肯定是无法做到的。这会牵涉到各种各样的动态考虑，而我们却坚守静态理论！另外，博弈规则有可能不提供这样的观察机会；[①]"硬币配对"和"石头、剪子、布"游戏就肯定不允许这样的观察。在第 14 节的讨论和概率得到运用的当前讨论中都出现这些冲突和矛盾。

如何解决这些矛盾呢?

17.3.2 我们的答案是：

在开始的时候，第 14 节和第 17 节中结果——14.5 和

---

① 即在一局博弈之内"逐步"观察对手的行为。——147,①

17.8 的讨论——的最终证明不包含任何这类矛盾的因素。这样，我们就能够说，我们的最终证明是正确的，尽管引出这些证明的这一试探过程是值得怀疑的。

不过，这些方法也是能够得到证明的。我们并不想做出让步：我们的观点是静态的，而且，我们分析的只是一局博弈。我们正在试图建立一个令人满意的二人零和博弈理论。因此，我们并非在从已经有的、经受了合理考验的坚实理论出发进行演绎，而是在寻找这样一种理论。① 在已有的过程中，传统逻辑工具和间接证明工具的运用是完全合理的。这包括，设想我们有了关于特定理想类型的博弈的令人满意的理论②，努力勾画这一想像中的情况的结果，然后从中得出假设中的理论将会是个什么样子的结论。如果这一过程得到了成功应用，那么，有关这一典型情况的假设中的理论的可能范围就会缩小到这样一个程度：只剩下一种可能性，即借助这 148
一方法，这一理论得以确立。③ 当然，这一方法的应用甚至有可能更加"成功"，使可能的范围缩小到什么东西都

---

① 我们的方法当然是经验方法：我们正试图理解、使之形式化和推广我们认为是典型的最简单博弈的那些特征。这是有着经验基础的所有学科学中的标准做法。——147，②

② 这是对这样的一个事实的认同，即我们还没有这样一个理论，而且，我们也无法想像它会是什么样子，假如我们将有一个的话。

这并不比任何学科中的间接证明更差（例如，数学和物理学中的反证法）。——147，③

③ 物理学中有若干这类重要例子。狭义相对论、广义相对论和波动力学的发现就是这类例子。见达布罗（A. D'Abro）：《力学在现代物理学中的衰落》，纽约，1939。——148，①

没有剩下，即它证明了渴望中的那种一致理论是不存在的。①

17.3.3 现在，让我们设想存在着一个完备的二人零和博弈理论，它告诉一位玩家做什么，而且，它是绝对可信的。如果这位玩家知道这个理论，那么，每一位玩家都不得不假设，他的这一策略已经被对手发现。对手知道这一理论，而且，他知道，一位玩家要是不服从这一策略，就是不聪明的。② 因此，假设存在一个令人满意的理论，使我们对一位玩家的策略被对手"发现"这一情况的研究变得合理了。而且，只有在我们能够协调 Γ_1，Γ_2 这两个极端情况——玩家 1 的策略"被发现"或玩家 2 的策略"被发现"，一种合理的理论才能够存在。

对于最初的研究方法——不使用概率（即纯策略）——来说，我们能够做到的程度是由 14.5 决定的。

我们看到，严格决定的情况是这样一种情况，即存在一个基于这一情况的令人满意的理论。我们现在要借助概率（即混合策略）使我们的研究更深入一步。14.5 中不涉及概率时所利用的工具将再次得到利用，即关于一位玩

---

① 在物理学中，这样的事情也出现过。在量子力学中，玻尔和海森堡（N. Bohr-Heisenberg）关于"不可同时观察的量"的分析就允许这种解释。见玻尔（N. Bohr）：《原子论和自然描述》，伦敦，1931，第 I 章。——148，②

② 为什么不服从这一策略就是不聪明的呢？这不是我们要关心的问题。我们已经假设，这一理论是绝对可信的。

从我们的最终结果来看，这是不可能的。我们将发现一个令人满意的理论。它毕竟意味着这位玩家的策略被其对手发现了。不过，该理论只告诉他如何调整自己以避免输掉。见 17.6 中的定理和 17.8 中我们关于完备解的讨论。——148，③

家被对手“发现”的分析。[1]

我们将证明，假设中的理论能够得到证实，而且，其中包括所有情况（不仅仅是严格决定的情况，见 17.5.1，17.6）。

在这一理论发现之后，我们必须通过直接的论述来说明其合理性。[2] 对严格决定的情况，我们已经在 14.5 中这么做了；对我们目前的完备理论，我们也将在 17.8 中这么做。

17.4　混合策略的小博弈和大博弈

17.4.1　现在，我们面对的情况是：玩家 1 从 S_{β_1} 中任 *149*
意选择一个元素 $\vec{\xi}$，玩家 2 从 S_{β_2} 中任意选择一个元素 $\vec{\eta}$。

如果玩家 1 只想使用策略 $\sum_1^{\tau_1}$，那么，他将把 $\vec{\xi}$ 选为坐标向量 $\vec{\delta}^{\tau_1}$（见 16.1.3）；类似，如果玩家 2 只想使用策略 $\sum_2^{\tau_2}$，那么，他将把 $\vec{\eta}$ 选为坐标向量 $\vec{\delta}^{\tau_2}$。

我们仍然假设玩家 1 在不知道玩家 2 的 $\vec{\eta}$ 选择的情况下做出 $\vec{\xi}$ 选择，反之亦然。

这是说，当这些选择做出后，玩家 1 实际上将按照概率 ξ_{τ_1} 使用 $\tau_1 = 1, \cdots, \beta_1$，玩家 2 实际上将按照概率 η_{τ_2} 使用

---

① 即一个理论只利用我们目前的工具。当然，我们并不装作能够做出“绝对的”陈述。如果我们目前的要求无法得到满足，那么，我们就不得不寻找其他理论基础。实际上，从有着纯策略的第 14 节过渡到有着混合策略的 17.8，我们已经这么做了。——148，④

② 如上面描述的那样，间接论述只给出必要条件。因此，它有可能给出谬论（借助谬论来证明），或者将可能性缩小到只剩一种情况；不过，在后一种情况下，仍有必要证明剩下那种可能性是令人满意的。——148，⑤

$\tau_2=1,\cdots,\beta_2$。由于他们的选择是相互独立的,结果的数学期望是

(17:2) $$K(\vec{\xi},\vec{\eta})=\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\beta_1}\eta_{\beta_2}。$$

换句话说,我们用一个基本上与 Γ 有着相同结构的新博弈替换了 Γ,但是,它们之间存在着如下形式上的不同:数 τ_1,τ_2——玩家选择——由向量 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 取代;函数 $H(\tau_1,\tau_2)$——结果或一局博弈的数学期望——由 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 取代。这些讨论证明了,我们现在看待 Γ 的观点与 14.1.2 的观点等价,正如上面描述的那样,惟一的区别是,用 $\vec{\xi}$,$\vec{\eta}$、$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 替换了 τ_1,τ_2、$H(\tau_1,\tau_2)$。这一同构暗示着我们运用最初的 Γ 的相同工具的应用,正如 14.2、14.3.1 和 14.3.3 中描述的那样,与小博弈 Γ_1 和大博弈 Γ_2 的比较。

17.4.2 在 Γ_1 中,玩家 1 首先选择其 $\vec{\xi}$,玩家 2 在充分知道其对手的选择 $\vec{\xi}$ 的情况下做出自己的选择 $\vec{\eta}$。在 Γ_2 中,颠倒他们的选择顺序。因此,14.3.1 中的讨论可以一字不漏地照搬过来。选择一个特定的 $\vec{\xi}$ 的玩家 1 期待着玩家 2 选择其 $\vec{\eta}$ 使 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 最小,即玩家 1 的选择 $\vec{\xi}$ 导致 $\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})$。这仅仅是 $\vec{\xi}$ 的一个函数,从而,玩家 1 应该选择他的 $\vec{\xi}$ 使 $\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 最大。因此,对于玩家 1 来说,Γ_1 的一局博弈的值是

150 $$\mathrm{v}'_1=\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})。$$

类似地,对于玩家 1 来说,Γ_2 的一局博弈的值是

$$v'_2 = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})。$$

[对手有理性行为的假设并不真正起作用，因为 14.3.1 和 14.3.3 中的（14：A：a）—（14：A：e），（14：B：a）—（14：B：e）也可以一字不漏地照搬过来。]

像 14.4.1 那样，我们可以认为，对于玩家 1 来说，Γ_1 劣于 Γ_2。这一明显事实表明

$$v'_1 \leqq v'_2,$$

这一结果的严格证明包含在 13.4.3 的（13：A*）之中，那里的 x、y、φ 对应着我们的 $\vec{\xi}$、$\vec{\eta}$、K。① 如果恰好

$$v'_1 = v'_2,$$

那么，14.5 中的分析可以照搬过来。（14：C：a）—（14：C：f）、（14：D：a）和（14：D：b）界定一个"好的"$\vec{\xi}$ 和 $\vec{\eta}$ 的概念，并把对于玩家 1 来说一局博弈的值固定为

$$v' = v'_1 = v'_2。②$$

根据 13.4.3，当且仅当 K 的一个鞍点存在，所有这些才会发生。（那里的 x、y、φ 对应着我们 $\vec{\xi}$、$\vec{\eta}$、K。）

17.5 广义严格决定性

17.5.1 现在，我们用 v'_1，v'_2 替换了（14：A：c）和（14：B：c）中的 v_1，v_2，而且，上面的讨论表明，前者能够起

---

① 虽然 $\vec{\xi}$ 和 $\vec{\eta}$ 是向量，即实数序列（$\xi_1,\cdots,\xi_{\beta_1}$）和（$\eta_1,\cdots,\eta_{\beta_2}$），但在最大化和最小化中，我们完全可以视它们中的每一个为一个变量。它们的取值范围当然是我们在 17.8 中引入的集合 S_{β_1} 和 S_{β_2}。——150，①

② 详细说明见 17.8。——150，②

到后者的作用。不过，我们像当初依赖 $v_1 = v_2$ 那样依赖 $v'_1 = v'_2$。人们会问，这一替换有什么好处呢？

事实上，对于任意的 Γ，有 $v'_1 = v'_2$ 比 $v_1 = v_2$ 更有前途。过去，当 $v_1 = v_2$ 时，我们称 Γ 为严格决定的；现在，为了有所区别，我们称 $v_1 = v_2$ 的 Γ 为狭义严格决定的，称 $v'_1 = v'_2$ 的 Γ 为广义严格决定的。除非我们能够证明前者意味着后者，引入这一专门术语才是合理的。

151 常识告诉我们，上述说法是显然的：引入混合策略增加了玩家保护自己的策略不被"发现"的能力，因此 v'_1、v'_2 介于 v_1、v_2 之间是预料之中的事情。出于这一理由，我们可以断定

(17:3) $\quad v_1 \leqq v'_1 \leqq v'_2 \leqq v_2$。

（该不等式保证上述说法。）

为了排除可能有的怀疑，我们将给出(13:3)的严格证明。作为另外一个引理的推论，这很容易证明。

17.5.2 首先，我们证明如下相关引理：

(17:A) 对于 $S\beta_1$ 每一个 $\vec{\xi}$，

$$\mathrm{Min}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1} \eta_{\tau_2}$$

$$= \mathrm{Min}_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1}。$$

对于 S_{β_2} 中每一个 $\vec{\eta}$，

$$\mathrm{Max}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \mathrm{Max}_{\vec{\eta}} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1} \eta_{\tau_2}$$

$$= \mathrm{Max}_{\tau_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1, \tau_2) \eta_{\tau_2}。$$

证明：首先证明第一个公式。第二个公式的证明完全相同，交换 Max 和 Min，≦和≧即可。

考虑一个特殊向量 $\vec{\eta}=\vec{\delta}^{\tau'_2}$（见 16.1.3 和 17.2 末尾），我们有

$$\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}\leqq\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\delta_{\tau_2\tau'_2}$$
$$=\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau'_2)\xi_{\tau_1}。$$

由于上式对所有 τ'_2 成立，故

$$(17:4:a)\quad \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}\leqq\mathrm{Min}_{\tau'_2}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau'_2)\xi_{\tau_1}。$$

另一方面，对所有 τ_2，

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\leqq\mathrm{Min}_{\tau_2}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}。$$

给定 S_{β_2} 中任一 $\vec{\eta}$，用 η_{τ_2} 与之相乘并对 $\tau_2=1,\cdots,\beta_2$ 求和。因为 $\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}\eta_{\tau_2}=1$，故

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}\geqq\mathrm{Min}_{\tau_2}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}。$$ 152

由于上述结果对所有 $\vec{\eta}$ 都成立，故

$$(17:4:b)\quad \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}\geqq\mathrm{Min}_{\tau_2}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}。$$

(17:4:a) 与 (17:4:b) 合起来给出我们需要的关系。

如果我们把上述公式与 17.4 中 v'_1、v'_2 的定义结合起来，那么，我们得到

$$(17:5:a)\qquad v'_1=\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\tau_2}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1},$$

$$(17:5:b) \qquad v'_2 = \text{Min}_{\vec{\eta}}\text{Max}_{\tau_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2}。$$

这些公式有一个简单的文字解释:在 v'_1 的计算中,我们只须保护玩家1的策略不被发现,这体现在 $\vec{\xi}$(而不是 τ_1)的使用之中;玩家 2 可以像原来那样继续使用 τ_2(而不使用 $\vec{\eta}$)。在计算 v'_2 时,交换玩家的角色即可。常识告诉我们,这是明显合理的:v'_1 属于博弈 Γ_1(见 17.4 和14.2);在那里,玩家 2 在玩家 1 之后做出选择且充分知道玩家 1 的选择,因此他不需要防止自己的策略被玩家 1 发现。由于 v'_2 属于博弈 Γ_2(同上),玩家的角色被交换了。

如果我们限制 $\vec{\xi}$ 在上述公式中的 $\text{Max}_{\vec{\xi}}$ 中的变动范围,v'_1 的值就会变得小一些。让我们将其限制为向量 $\vec{\xi} = \vec{\delta}^{\tau'_1}$,($\tau'_1 = 1,\cdots,\beta'_1$,见 16.1.3 和 17.2 末尾)。由于

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)\delta_{\tau_1\tau'_1} = H(\tau'_1,\tau_2),$$

我们的表达式被替换为

$$\text{Max}_{\tau'_1}\text{Min}_{\tau_2}H(\tau'_1,\tau_2) = v_1。$$

这样,我们证明了

$$v_1 \leqq v'_1。$$

类似(见我们上面的引理的证明前的说明),将 $\vec{\eta}$ 限制为 $\vec{\eta} = \vec{\delta}^{\tau'_2}$,我们有

$$v_2 \geqq v'_2。$$

153 结合 $v_1 \leqq v'_1$(见 17.4),这些不等式证明了

$$v_1 \leqq v'_1 \leqq v'_2 \leqq v_2。$$

17.6　主要定理证明

17.6　我们已经证明,预料之中的广义严格决定性($v'_1=v'_2$)在狭义严格决定情况下是成立的。我们关于"硬币配对"和"石头、剪子、布"游戏的讨论表明,它还在其他一些情况下成立,即我们能够有 $v'_1=v'_2$ 但没有 $v_1=v_2$。[①]因此,我们可以在 17.5.1 的意义上说,从狭义严格决定性过渡到广义严格决定性的确是一个进步。不过,就我们所知,这一进步也许并不包括本应该控制的范围。特定的博弈 Γ 甚至能够是非广义严格决定的,即我们还没有排除如下可能性

$$v'_1 < v'_2。$$

如果这种情况发生了,那么,我们在 14.7.1 中的讨论就又适用了,而且,在更大程度上,发现对手的策略有着确定的优势:

$$\Delta' = v'_1 = v'_2 > 0,$$

而且,难以看出,没有关于"谁发现谁的策略"的进一步假设,博弈理论如何能够建立起来。

因此,关键是,我们要能够证明,这样的事情永远也不会发生。对所有博弈 Γ,总有

$$v'_1 = v'_2,$$

即

$$(17:6)\qquad \mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}),$$

或者说[再次应用 13.4.3 中的(13:B*),那里的 x、y、φ 对

---

① 在这两种游戏中,$v_1=-1$,$v_2=1$(见 14.7.2 和 14.7.3),但是,17.1 中的讨论证明了 $v'_1=v'_2=0$。——153,①

应着我们这里的 $\vec{\xi}$、$\vec{\eta}$、K]:$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的一个鞍点存在。

这是一个对所有具有如下形式的函数 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 都成立的一个一般定理:

(17:2) $$K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}。$$

系数 $H(\tau_1,\tau_2)$ 绝对不受任何限制;如 14.1.3 中描述的那样,它们构成一个完全随意的矩阵。变量 $\vec{\xi}$、$\vec{\eta}$ 分别是实数

154 序列 $\xi_1,\cdots,\xi_{\beta_1}$ 和 $\eta_1,\cdots,\eta_{\beta_2}$;它们的定义域分别是集合 S_{β_1}、S_{β_2}(见第150页脚注①)。具有(17:2)形式的函数 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 被称为双线性型。

借助 16.4.3 的结果,这一证明并不困难。[①]下面就是

① 这一定理最初是在博弈论的创始人之一的一篇公开发表的文章中提出并得到证明的:冯·诺伊曼:"Zur Theorie der Gesellschaftsspiele,"Math. Annalen, Vlo. 100(1928), pp. 295—320。

这一最小最大化问题的一个略微更一般形式产生于另一个与生产方程有关的数理经济学问题之中。

冯·诺伊曼:"Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwer'schen Fixpunktsatzes,"Ergebnisse eines Math. Kolloquiums, Vol. 8(1937), pp. 73—83。

值得指出的是,两个大不相同的问题联系到数理经济学——尽管采取了完全不同的分析方法——却导致了同一数学问题,而且具有相当非同寻常的类型:"最小一最大型"。如上述第二篇文章里提到的那样,这里以及在其他方向,也许存在着更深的形式上的联系。这个题目应该得到进一步澄清。

第一篇文章中给出的定理证明用到了拓扑学和谓词演算。第二篇文章包含一个不同的证明,它完全是拓扑学的证明,并使这一定理联系到这一学科中的一个重要工具:布劳威尔(L. E. J. Brouwer)的"不动点定理"。这方面得到了进一步澄清,且这一定理的证明在卡库塔尼(S. Kakutani)手里得到简化:"布劳威尔的不动点定理的推广",《杜克数学杂志》,第8卷(1941),第457—459页。

我们的证明：

我们应用 16.4.3 中的(16:19:a)、(16:19:b)，用我们这里的 τ_1、τ_2、β_1、β_2、$H(\tau_1,\tau_2)$ 替换那里的 i、j、n、m、$a(i,j)$，并用我们这里的 $\vec{\xi}$、$\vec{\eta}$ 替换那里的 $\vec{w}$、$\vec{x}$。

如果(16:19:b) 成立，那么，我们有 S_{β_1} 中的一个向量 $\vec{\xi}$ 满足

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1} \geqq 0, \qquad \tau_2 = 1,\cdots,\beta_2,$$

即

$$\mathrm{Min}_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1} \geqq 0。$$

因此，17.5.2 的公式(17:5:a) 给出

$$v'_1 \geqq 0。$$

如果(16:19:a) 成立，那么，我们有 S_{β_2} 中的一个向量 $\vec{\eta}$ 满足

$$\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2} \leqq 0, \qquad \tau_1 = 1,\cdots,\beta_1,$$

即 155

$$\mathrm{Max}_{\tau_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2} \leqq 0。$$

所有这些证明肯定都不是基本的证明。第一个基本证明是由维勒(J. Ville)给出的，见波莱尔(E. Borel) 等编辑的论文集："Traité du Calcul des Pobabilités et de ses Applications," Vlo. IV, 2: "Applications aux Jeux de Hasard," 巴黎(1938)，由维勒给出的注："Sur la Théorie Générale des Jeux où intervient l' Habileté des Joueurs," pp. 105—113。

我们接下来给出的证明保留了由维勒提出的基本化，且变得尤其简单。这一方法的关键是与第 16 节中的凸性理论的联系，尤其是与 16.4.3 的结果的联系。——154,①

所以,17.5.2 的公式(17:5:b)给出

$$v'_2 \leqq 0。$$

这样,我们看到:要么 $v'_1 \geqq 0$,要么 $v'_2 \leqq 0$,即

(17:7) $v'_1 < 0 < v'_2$

是不可能的。

现在,我们随便选一个数 w,并用 $H(\tau_1,\tau_2) - w$ 替换 $H(\tau_1,\tau_2)$。①

用 $K(\vec{\xi},\vec{\eta}) - w\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}$ 替换 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$——由于 $\vec{\xi}$、$\vec{\eta}$ 分别属于 S_{β_1}、S_{β_2} 之中,且 $\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\xi_{\tau_1}, \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}\eta_{\tau_2} = 1$,也就是说用 $K(\vec{\xi},\vec{\eta}) - w$ 进行替换。因此,v'_1、v'_2 被分别替换为 $v'_1 - w$ 和 $v'_2 - w$。②所以,(17:7)应用于 $v'_1 - w$ 和 $v'_2 - w$ 给出

(17:8) $v'_1 < w < v'_2$ 是不可能的。

w 是完全随意的一个数。假如 $v'_1 < v'_2$,那么,我有可能选择一个数 w 使 $v'_1 < w < v'_2$,这与(17:8)矛盾。所以,$v'_1 < v'_2$ 是不可能的。这就证明了 $v'_1 = v'_2$。证明完毕。

17.7 纯策略与混合策略方法比较

17.7.1 让我们进一步思考

$$v'_1 = v'_2$$

的含义。这一结果的基本特点是,我们总有 $v'_1 = v'_2$,但并不总有 $v_1 = v_2$,即我们总有广义严格决定性,而并不总有

---

① 即博弈 Γ 被一个新博弈取代,它与 Γ 的惟一不同之处是在博弈结束时玩家 1 的得(玩家 2 的失)少一个固定的量 w。——155,①

② 如果我们记得上面的脚注,这是十分清楚的。——115,②

狭义严格决定性(见 17.6 开头)。

用数学来表达:

我们总有

(17:9)　$\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})$,

即 156

(17:10)
$$\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}$$
$$= \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}。$$

应用(17:A),我们甚至可以将其写成

(17:11)
$$\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\tau_2}\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}$$
$$= \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\tau_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2}。$$

但我们并不总有

(17:12)　$\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2) = \mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}H(\tau_1,\tau_2)$。

让我们比较(17:9)和(17:12):(17:9)总是成立,但是,(17:12)并不总是成立。然而,两者的区别仅仅在于 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 和 τ_1,τ_2。为什么用前者替换后者之后,不成立的(17:12)就转变成了成立的(17:9)了呢?

这是因为,(17:12)中的 $H(\tau_1,\tau_2)$ 是其变量 τ_1,τ_2 的一个完全随意的函数(见 14.1.3),而(17:9)中的 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是其变量 $\vec{\xi},\vec{\eta}$——即 $\xi_1,\cdots,\xi_{\beta_1};\eta_1,\cdots,\eta_{\beta_2}$——的一个极为特殊的函数,一个双线性型(见 17.6 的第一部分)。因此,$H(\tau_1,\tau_2)$ 的绝对一般性使得(17:12)的证明是不可能的,而 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的特殊性——双线性型——提供了

(17:9) 得到证明的基础，见 17.6。[①]

17.7.2 看似不可理解的是，尽管 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是在 $H(\tau_1,\tau_2)$ 的基础上通过一个有着全面说明的推广过程得到的，前者竟然比后者更加特殊：正如 17.2 描述的那样，我们用混合策略替换最初的纯策略而得到了 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$，即我们用 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 替换 τ_1,τ_2。

但是，进一步思考就会排除这一悖论。与 $H(\tau_1,\tau_2)$ 相
157 比，$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是一个十分特殊的函数；不过，其变量比原来的变量 (τ_1,τ_2) 有着更广泛的取值范围。事实上，τ_1 以有限集 $(1,\cdots,\beta_1)$ 作为其定义域，而 $\vec{\xi}$ 的取值范围是集合 S_{β_1}，它是 β_1 维线性空间 S_{β_1} 中的一个 (β_1-1) 维空间（见 16.2.2 和 17.2）。关于 τ_2 和 $\vec{\eta}$，有类似的说法。[②]

---

① $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是一个双线性型。这归因于每当涉及概率时，我们就使用"数学期望"。显然，这个双线性型与一个解的存在性有关。从数学上讲，这打开了一个相当有意思的视角：我们可以探索用其他概念替代"数学期望"，而不会破坏我们的解，即 17.6，关于二人零和博弈的结果。

显然，在很多方面，"数学期望"都是一个很基本的概念，其在效用理论中的意义在 3.7.1 中得到了强调。——156，①

② 注意，$\vec{\xi}=\{\xi_1,\cdots,\xi_{\beta_1}\}$ 有分量 ξ_{τ_1}，$\tau_1=1,\cdots,\beta_1$，也包含 τ_1；但是，存在着基本的区别。在 $H(\tau_1,\tau_2)$ 中，τ_1 本身是一个变量。在 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 中，$\vec{\xi}$ 是一个变量，而 τ_1 是这个变量之内的一个变量。$\vec{\xi}$ 实际上是 τ_1 的一个函数（见 16.1.2 末尾），而且这个函数是 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的变量。关于 τ_2 和 $\vec{\eta}$，有类似说法。

用 τ_1,τ_2 来表达：$H(\tau_1,\tau_2)$ 是 τ_1,τ_2 的一个函数，而 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是 τ_1,τ_2 的一个函数的函数（用数学术语说：一个泛函）。——157，①

在 S_{β_1} 中的 $\vec{\xi}$ 中间，实际上存在着特殊的点，这些点对应着 $(1,\cdots,\beta_1)$ 中不同的 τ_1。给定这样一个 τ_1（如 16.1.3 中和 17.2 末尾那样），我们能够建立坐标向量 $\vec{\xi}=\vec{\delta}^{\tau_1}$，表明策略 $\sum_1^{\tau_1}$ 的选择，排除了其他选择。以同样方式，我们能够把 S_{β_2} 中特殊的 $\vec{\eta}$ 与 $(1,\cdots,\beta_2)$ 中的 τ_2 联系起来：给定这样一个 τ_2，我们能够建立坐标向量 $\vec{\eta}=\vec{\delta}^{\tau_2}$，表明策略 $\sum_2^{\tau_2}$ 的选择，排除了其他选择。

显然：
$$K(\vec{\delta}^{\tau_1},\vec{\delta}^{\tau_2})=\sum_{\tau'_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau'_2=1}^{\beta_2}H(\tau'_1,\tau'_2)\delta_{\tau'_1\tau_1}\delta_{\tau'_2\tau_2}$$
$$=H(\tau_1,\tau_2)。①$$

因此，函数 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 尽管有其特殊性，却包含整个函数 $H(\tau_1,\tau_2)$，从而它的确是两者的更一般概念。由于并非所有 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 具有特殊形式 $\vec{\delta}^{\tau_1},\vec{\delta}^{\tau_2}$，即并非所有混合策略都是纯策略②，$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 比 $H(\tau_1,\tau_2)$ 更具一般性。$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是一个双线性型。这一事实只不过表达了这一扩张是借助线性差值法来实现的。也就是说，这一必要的过程归于"数学期望"的直线性。③

17.7.3　把从(17:9)到(17:12)的过程倒过来，我们就会看出，我们能够以如下方式说明(17:9)—(17:11) *158*

---

① 如果我们考虑策略的选择 $\vec{\delta}^{\tau_1},\vec{\delta}^{\tau_2}$ 代表着什么，这个公式的含义十分清楚。——157，②

② 即若干策略可能会以正的概率得到有效使用。——157，③

③ 数字效用概念与线性的"数学期望"之间基本联系是在 3.7.1 末尾被指出的。——157，④

正确和(17:12)不正确:

(17:9)和(17:10)表达的是,通过使用混合策略 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 而不使用纯策略 τ_1,τ_2,每位玩家都能够充分保护自己的策略不被对手发现。(17:11)表明,如果发现了对手的策略的玩家使用 τ_1,τ_2,上述说法仍然成立,同时,只有自己的策略正在被发现的玩家才享有 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 的保护作用。最后,(17:12)的错误表明,两位玩家,尤其是其策略被发现的那位玩家,不能无视 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 的保护作用。

17.8 广义严格决定性分析

17.8.1 正如 17.4 末尾提到过的那样,我们将重新表述 14.5 的内容,尤其考虑到 17.6 中建立起来的事实:每一个二人零和博弈 Γ 都是广义严格决定的。由于这一结果,我们可以定义:

$$
\begin{aligned}
v' &= \mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}) \\
&= \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}) \\
&= \mathrm{Sa}_{\vec{\xi}|\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})。
\end{aligned}
$$

[见 13.5.2 中(13:C*)和 13.4.3 末尾。]

我们构造两个集合 $\overline{A}$、$\overline{B}$,它们分别是 S_{β_1}、S_{β_2} 的子集,类似于 14.5.1 中(14:D:a),(14:D:b)中集合 A、B 的定义。在 13.5.1 中,它们是 A^{φ} 和 B^{φ}(φ 对应着我们的 K)。我们定义:

(17:B:a) $\overline{A}$ 是 S_{β_1} 中这样一些 $\vec{\xi}$ 组成的集合,对

于这些 $\vec{\xi}$,$\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 取其最大值,即

$\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{v}'$。

(17:B:b)　　$\bar{B}$ 是 S_{β_1} 中这样一些 $\vec{\eta}$ 组成的集合,对于这些 $\vec{\eta}$,$\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 取其最小值,即

$\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{v}'$。

现在,我们有可能重述 14.5 中的论述了。

在具体做的过程中,我们将使用与 14.5 中(14:C:a)—(14:C:f) 类似的列举方式。[①]

首先,我们看到: 159

(17:C:d)　　无论玩家 2 如何玩,玩家 1 都能够借助恰当的玩法保证自己的收益 ≧ v′。

无论玩家 1 如何玩,玩家 2 都能够借助恰当的玩法保证自己的收益 ≧ − v′。

证明:令玩家 1 从 $\bar{A}$ 选择 $\vec{\xi}$,那么,无论玩家 2 做什么,即对每一 $\vec{\eta}$,我们有 $K(\vec{\xi},\vec{\eta}) \geqq \mathrm{Min}_{\vec{\eta}} = \mathrm{v}'$。令玩家 2 从 $\bar{B}$ 选择 $\vec{\eta}$,那么,无论玩家 1 做什么,即对每一 $\vec{\xi}$,我们有 $K(\vec{\xi},\vec{\eta}) \leqq \mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{v}'$。证明完毕。

第二,(17:C:d) 显然等价于

(17:C:e)　　无论玩家 1 如何玩,玩家 2 都能够借助恰当的玩法保证玩家 1 的收益 ≦ v′,即防止玩家 1 的收益 > v′。

---

① (a)—(f) 出现的顺序将不同于其自然顺序。14.5 中也是这样,因为那里的列举是基于 14.3.1 和 14.3.2 中的列举进行的,而且这些段落中的讨论遵循了一条略微不同的思路。——158,①

无论玩家2如何玩，玩家1都能够借助恰当的玩法保证玩家2的收益 $\leq -v'$，即防止玩家2的收益 $> -v'$。

17.8.2 第三，根据(17:C:d)和(17:C:e)并考虑到(17:C:d)的证明过程，现在，我们可以断言

(17:C:a) 对于玩家1来说，博弈 Γ 的好的玩法（策略组合）是选择一个属于 $\overline{A}$ 的 $\vec{\xi}$，其中 $\overline{A}$ 是(17:B:a)中的集合 $\overline{A}$。

(17:C:b) 对于玩家2来说，博弈 Γ 的好的玩法（策略组合）是选择一个属于 $\overline{B}$ 的 $\vec{\eta}$，其中 $\overline{B}$ 是(17:B:b)中的集合 $\overline{B}$。

第四，(17:C:d)中的结论——(17:C:e)中的等价结论——给出：

(17:C:c) 如果玩家1和玩家2都选择博弈 Γ 的最佳玩法，即如果 $\vec{\xi}$ 属于 $\overline{A}$ 且 $\vec{\eta}$ 属于 $\overline{B}$，那么，对于玩家1来说，$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的值将等于一局博弈的值，即 v'。

13.5.2中的(13:D*)和(17:B:a)，(17:B:b)前面关于集合 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 的说明结合起来给出：

(17:C:f) 当且仅当 $\vec{\xi}$，$\vec{\eta}$ 是 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的一个鞍点时，玩家1和玩家2都选择了好的玩法，即 $\vec{\xi}$ 属于 $\overline{A}$ 且 $\vec{\eta}$ 属于 $\overline{B}$。

160 所有这些应该弄清楚了的是，v′的确可以被解释为对于玩家1来说 Γ 的一局博弈的值，而且 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 包含着对于玩家1和玩家2来说的 Γ 的最佳玩法。关于(17:C:a)—(17:

C:f) 的整个论述，不存在任何试探性的或不确定性的东西。关于玩家的“才智”和“谁发现谁的策略”等，我们没有做出额外假设。我们的结果也不要求玩家之一相信另一个玩家的理性行为，这是我们一再强调的一点。（见 4.1.2 末尾和 15.8.3。）

17.9　良策的其他特征

17.9.1　17.8.2 中（17:C:c）和（17:C:f）还给出了我们现有解的基本要素 —— 即数 v′，向量集合 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$—— 的简明特征。

根据（17:C:c），$\bar{A}$，$\bar{B}$ 决定着 v′，因此我们只需研究 $\bar{A}$，$\bar{B}$，而且我们将借助（17:C:f）进行研究。

按照这一原理，当且仅当 $\vec{\xi}$，$\vec{\eta}$ 是 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的一个鞍点时，$\vec{\xi}$ 属于 $\bar{A}$ 且 $\vec{\eta}$ 属于 $\bar{B}$。这意味着，

$$K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \begin{cases} \mathrm{Max}_{\vec{\xi}'} K(\vec{\xi}',\vec{\eta}) \\ \mathrm{Min}_{\vec{\eta}'} K(\vec{\xi},\vec{\eta}') \end{cases}$$

要将其弄明确，我们要借助 17.4.1 和 17.6 中关于 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的表达式（17:2）以及 17.5.2 中关于 $\mathrm{Max}_{\vec{\xi}'} K(\vec{\xi}',\vec{\eta})$ 和 $\mathrm{Min}_{\vec{\eta}'} K(\vec{\xi},\vec{\eta}')$ 的引理（17:A）的表达式。这样，我们的方程变成了

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\sum_{\tau_2=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2} = \begin{cases} \mathrm{Max}_{\tau'_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau'_1,\tau_2)\eta_{\tau_2} \\ \mathrm{Min}_{\tau'_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)'\xi_{\tau_1} \end{cases}$$

考虑到$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\xi_{\tau_1} = \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}\eta_{\tau_2} = 1$,我们还能够将其写为

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}\left[\text{Max}_{\tau'_1}\left\{\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau'_1,\tau_2)\eta_{\tau_2}\right\}-\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2}\right]\xi_{\tau_1} = 0,$$

$$\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2}\left[-\text{Min}_{\tau'_2}\left\{\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau'_2)\xi_{\tau_1}\right\}+\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}\right]\eta_{\tau_2} = 0。$$

161 在这些方程式的左边,ξ_{τ_1},η_{τ_2} 的系数都不小于0。[①]$\xi_{\tau_1}\eta_{\tau_2}$ 本身也都不小于0。所以,只有在左边所有项目各自为零时,这些方程才成立,即对其系数不等于零的每一个 $\tau_1 = 1,\cdots,\beta_1$,我们有 $\xi_{\tau_1} = 0$;而对系数不等于零的每一个 $\tau_2 = 1,\cdots,\beta_2$,我们有 $\eta_{\tau_2} = 0$。

总之:

(17:D) $\vec{\xi}$ 属于 $\overline{A}$ 且 $\vec{\eta}$ 属于 $\overline{B}$,当且仅当:

对于 $\sum_{\tau_2=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2}$ 没有(在 τ_1)取得其最大值的每一个 $\tau_1 = 1,\cdots,\beta_1$,我们有 $\xi_{\tau_1} = 0$。

对于 $\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1}H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}$ 没有(在 τ_2)取得其最小值的每一个 $\tau_2 = 1,\cdots,\beta_2$,我们有 $\eta_{\tau_2} = 0$。

这些原理的文字描述并不那么困难。它们代表着:如果 $\vec{\xi}$,$\vec{\eta}$ 是好的混合策略,那么,$\vec{\xi}$ 排除了对于玩家1来说不是针对 $\vec{\eta}$ 的最优策略的策略 τ_1,而且,$\vec{\eta}$ 排除了对于玩家2来说不是针对 $\vec{\xi}$ 的最优策略的策略 τ_2;也就是说,正如我们预料的那样,$\vec{\xi}$,$\vec{\eta}$ 是相互针对着的最优策略。

---

① 注意其中的 Max 和 Min 的位置!——161,①

17.9.2　这里,还可以说明:

(17:E)　　一个博弈是狭义严格决定的,当且仅当每一位玩家有一个是纯策略的良策。

根据我们前面的讨论,尤其是我们从纯策略过渡到混合策略的推广过程,这一结论在直觉上也是可信的。不过,我们仍给出一个同样简单的数学证明。证明如下:

我们在 17.5.2 的最后一部分看到,v_1 和 v'_1 都是通过将 $\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}$ 运用于 $\mathrm{Min}_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1, \tau_2)\xi_{\tau_1}$ 来得到的,只不过 $\vec{\xi}$ 的定义域有所不同:对于 v_1,其值域是所有 $\vec{\delta}^{\tau_1}$ ($\tau_1 = 1, \cdots, \beta_1$),即所有纯策略;对于 v'_1,其值域是整个 S_{β_1},即混合策略。因此,$v_1 = v'_1$,即两个最大值相等,当且仅当第二个值域的最大值(至少有一次)在第一个值域之内取得。根据(17:D),这意味着,(至少)有一个纯策略属于 $\bar{A}$,即它是良策。也就是说:

(17:F:a)　　$v_1 = v'_1$,当且仅当对于玩家 1 来说,存在一个是纯策略的良策。

同样:　162

(17:F:b)　　$v_2 = v'_2$,当且仅当对于玩家 2 来说,存在一个是纯策略的良策。

现在,$v'_1 = v'_2 = v'$,且严格决定性意味着 $v_1 = v_2 = v'$,即 $v_1 = v'_1$ 且 $v_2 = v'_2$。所以,(17:F:a) 和(17:F:b) 结合起来给出(17:E)。

17.10　错误、错误的后果和永久最优

17.10.1　我们前面的讨论已经弄清楚了什么是一个

良策。接下来，我们对其他混合策略做简单说明。我们想说的是那些不是良策的策略（即向量 $\vec{\xi},\vec{\eta}$）距"良策"有多远，并描述某一错误——不是良策的策略的使用——的后果。然而，我们并不详细讨论这个题目，它有着很多令人迷惑的结果。

对于 S_{β_1} 中任意一个 $\vec{\xi}$ 和 S_{β_2} 中任意一个 $\vec{\eta}$，我们构造数字函数

(17:13:a) $\alpha(\vec{\xi}) = \mathrm{v}' - \mathrm{Min}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi},\vec{\eta})$,

(17:13:b) $\beta(\vec{\eta}) = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) - \mathrm{v}'$。

根据 17.5.2 中的引理(17:A)

(17:13:a*) $\alpha(\vec{\xi}) = \mathrm{v}' - \mathrm{Min}_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}$,

(17:13:b*) $\beta(\vec{\eta}) = \mathrm{Max}_{\tau_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2} - \mathrm{v}'$。

定义

$$\mathrm{v}' = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\mathrm{Min}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\mathrm{Max}_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi},\vec{\eta})$$

总是保证

$$\alpha(\vec{\xi}) \geqq 0, \quad \beta(\vec{\eta}) \geqq 0。$$

而且，17.8 中的(17:B:a)、(17:B:b)和(17:C:a)、(17:C:b)意味着，$\vec{\xi}$ 是良策的充分必要条件是，$\alpha(\vec{\xi}) = 0$；$\vec{\eta}$ 是良策的充分必要条件是，$\beta(\vec{\eta}) = 0$。

因此，对于一般的 $\vec{\xi},\vec{\eta}$ 来说，$\alpha(\vec{\xi})$，$\beta(\vec{\eta})$ 很方便地衡量了它们与良策的差距。$\alpha(\vec{\xi})$，$\beta(\vec{\eta})$ 明确的文字描述使得这一解释更为明显：公式(17:13:a)、(17:13:b)、(17:

13:a*）和(17:13:b*）清楚表明了玩家拿这一策略冒险的损失的大小——相对于对他来说一局博弈的值①。这里，“冒险”指给定条件下能够发生的最大损失。② 163

然而，必须理解，$\alpha(\vec{\xi})$，$\beta(\vec{\eta})$ 并不揭示对手的哪一策略将给使用策略 $\vec{\xi}$ 或 $\vec{\eta}$ 的玩家带来这一（最大）损失。尤其不确定的是，如果对手使用某一良策，即 $\overline{B}$ 中的一个 $\vec{\eta}_0$ 或 $\overline{A}$ 中的一个 $\vec{\xi}_0$，这本身就意味着上述最大损失。如果一个（不良）策略 $\vec{\xi}$ 或 $\vec{\eta}$ 被一个玩家采用，那么，最大损失发生在对手的如下策略 $\vec{\xi}'$ 或 $\vec{\eta}'$

(17:14:a)　　$K(\vec{\xi},\vec{\eta}') = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi},\vec{\eta})$，

(17:14:b)　　$K(\vec{\xi}',\vec{\eta}) = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi},\vec{\eta})$，

也就是说，$\vec{\eta}'$ 是针对给定的 $\vec{\xi}$ 的最优策略，或 $\vec{\xi}'$ 是针对给定的 $\vec{\eta}$ 的最优策略。而且，我们永远无法断定一个固定的 $\vec{\eta}_0$ 或 $\vec{\xi}_0$ 是否能够是针对所有 $\vec{\xi}$ 或 $\vec{\eta}$ 的最优策略。

17.10.2　如果一个固定的 $\vec{\eta}'$ 是针对所有 $\vec{\xi}$ 的最优策略，或一个固定的 $\vec{\xi}'$ 是针对所有 $\vec{\eta}$ 的最优策略，我们说 $\vec{\eta}'$ 或 $\vec{\xi}'$ 是**永久最优策略**。也就是说，对于任意 $\vec{\xi}$，$\vec{\eta}$，永久

---

① 损失指一局博弈的值减去实际结果：对于玩家 1 来说是 $v' - K(\vec{\xi},\vec{\eta})$，对于玩家 2 来说是 $(-v') - [-K(\vec{\xi},\vec{\eta})] = K(\vec{\xi},\vec{\eta}) - v'$。——163，①

② 事实上，应用上面的脚注和(17:13:a)，(17:13:b)

$$\alpha(\vec{\xi}) = v' - \mathrm{Min}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{Max}_{\vec{\eta}}\{v' - K(\vec{\xi},\vec{\eta})\},$$

$$\beta(\vec{\eta}) = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) - v' = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\{K(\vec{\xi},\vec{\eta}) - v'\},$$

即每一个都是最大损失。——163，②

最优策略满足17.10.1中的(17:14:a)或(17:14:b)。任何永久最优策略$\vec{\eta}'$或$\vec{\xi}'$必然是良策；从概念上说，这是
164 显然的事情，而且证明也不困难。[①]不过，剩下的问题是：良策也是永久最优策略吗？再有，永久最优策略存在吗？

一般来说，上述问题的答案是不。在“硬币配对”或“石头、剪子、布”游戏中，对于玩家1和玩家2来说，惟一的良策分别是$\vec{\xi}=\vec{\eta}=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$或$\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\}$。[②]如果玩家1采取其他玩法，如总是出“正面”或总是出“石头”[③]，那么，如果对手的对策是“反面”或“布”[④]，他将遭受损失。不过，此时对手的策略并不是良策，即不是$\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$或$\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\}$。如果对手使用良策，这位玩家的错误倒无所

---

① 证明：就$\vec{\eta}'$进行证明就足够了。关于$\vec{\xi}'$，证明类似。

令$\vec{\eta}'$是一个永久最优策略。选择一个$\vec{\xi}^*$，它是一个针对$\vec{\eta}'$的最优策略，即

$$K(\vec{\xi}^*,\vec{\eta}') = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}}K(\vec{\xi},\vec{\eta}')。$$

按照定义，

$$K(\vec{\xi}^*,\vec{\eta}') = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}K(\vec{\xi}^*,\vec{\eta})。$$

因此，$\vec{\xi}^*$，$\vec{\eta}'$是$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$的一个鞍点，从而，由17.8.2中的(17:C:f)，$\vec{\eta}'$属于$\overline{B}$，即它是一个良策。——163，③

② 见17.1。任何其他概率分布，一旦被“发现”，就会遭受损失。见下面。——164，①

③ $\vec{\xi}=\vec{\delta}'=\{1,0\}$或$\{1,0,0\}$。——164，②

④ 即$\vec{\eta}=\vec{\delta}^*=\{0,1\}$或$\{0,1,0\}$。——164，③

谓了。①

我们将在 19.2 和 19.10.3 中——以较为精妙和复杂的方式——给出另一个这类例子，它与扑克游戏中的“诈叫”有联系。

所有这些可以概括为：我们所谓的良策从防守的角度看是完美的，但一般来说它们却不能从对手可能的错误中得到最大收益，即它们不是为进攻而进行的计算。

然而，应该牢记的一点是，17.8 中我们的演绎还是有说服力的，即从这个意义上说，不引入新的概念，一个进攻理论是不可能的。不愿意接受这一说法的读者应该再想像一下“硬币配对”或“石头、剪子、布”游戏中的情形。这两种博弈的极简单性把要点弄得十分清楚。

反对过分强调这一点的另一警告是：普通说法中，“进攻”名义下的很多内容并不是上述意义上的“进攻”，即我们的理论完全包括了这些内容。对于有着完美信息的博弈，如我们将在 17.10.3 中看到的那样，这一说法是对的。②对于扑克中“诈叫”之类典型的“进攻性”动作（和以信息不完美为必要条件的动作），上述说法也是对的。③

17.10.3　最后，我们还要说明的一点是，存在着一类重要的（二人零和）博弈，其中存在着永久最优策略。这些博弈正是我们在第 15 节，尤其是 15.3.2、15.6 和 15.7 中分

① “正面”（或“石头”）这一糟糕的玩法只能被“反面”（或“布”）击败，而后者本身也不是良策。——164，④

② 包括国际象棋和巴加门。——164，⑤

③ 上述讨论相当使用于不“诈叫”。见 19.2 和 19.3。——164，⑥

析的具有完备信息的博弈。事实上，这些博弈的狭义严格决定性证明稍做修改就足以证明这一结论。它会给出永久最优纯策略。不过，我们不在这里对其进行讨论。

165 由于具有完备信息的博弈总是狭义严格决定的（见上），我们也许猜想狭义严格决定的博弈与存在永久最优策略的博弈之间是否存在着更基本的联系。我们不在这里进一步讨论这些事情，只提一下与此有关的如下事实：

(17:G:a) 能够证明，如果（对于两位玩家来说）存在着永久最优策略，那么，该博弈必定是严格决定的博弈。

(17:G:b) 能够证明，(17:G:a) 的逆命题不成立。

(17:G:c) 经过进一步的研究，狭义决定性概念与永久最优策略的存在性有更为密切的联系。

17.11 交换玩家：对称性

17.11.1 下面，我们要讨论的是，对称性在博弈 Γ 中的作用，或更一般地说，交换玩家 1 和玩家 2 的影响。这自然是 14.6 的继续。

正如我们在那里指出过的那样，玩家交换的结果是用 $H(\tau_2,\tau_1)$ 替换 $H(\tau_1,\tau_2)$。17.4.1 的公式(17:2) 和 17.6 表明，这一交换的后果是，$-K(\vec{\eta},\vec{\xi})$ 替换 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$。用 16.4.2 的术语说，我们用[14.1.3 中 $H(\tau_1,\tau_2)$ 的] 矩阵的负转置矩阵替换这一矩阵。

因此，我们可以继续第 14 节中完全相似的思路。如果我们用 $\vec{\xi}, \vec{\eta}, K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ 替换那里的 $\tau_1, \tau_2, H(\tau_1, \tau_2)$，我们有与那里形式上相同的结果。(见 17.4 和 17.8 的结果。)

我们在 14.6 中看到，用 $-H(\tau_2, \tau_1)$ 替换 $H(\tau_1, \tau_2)$ 附带着 v'_1, v'_2 变成 $-v'_1, -v'_2$。这些分析的一字不漏的重复表明，用 $-K(\vec{\eta}, \vec{\xi})$ 替换 $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$，附带把 v'_1, v'_2 变成 $-v'_2, -v'_1$。总之：交换玩家 1 和玩家 2，附带把 v_1, v_2, v'_1, v'_2 变成 $-v_2, -v_1, -v'_2, -v'_1$。

14.6 对狭义严格决定性建立起来的结果 $v = v_1 = v_2$ 变成了 $-v = -v_1 = -v_2$。在缺乏对称性情况下，结论的这一提炼是不可能的。

现在，我们知道，我们总有广义严格决定性，所以，$v' = v'_1 = v'_2$。因此，这一结果变成 $-v' = -v'_1 = -v'_2$。

这一结果的文字描述也是清楚的：由于我们成功地定义了对于玩家 1 来说 Γ 的一局博弈的值 v'，当交换玩家时，这一数量应理所当然地改变正负号。

17.11.2　我们也可以严格地说，博弈 Γ 是对称的。当两位玩家在该博弈中有完全相同的角色时，即交换玩家 1 和玩家 2 后得到的博弈与原来的博弈完全相同时，情况就是这样。根据上面所说，这意味着 166

$$H(\tau_1, \tau_2) = -H(\tau_2, \tau_1),$$

或等价地说

$$K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = -K(\vec{\eta}, \vec{\xi})。$$

矩阵 $H(\tau_1, \tau_2)$ 或线性型 $K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ 的这一性质是在 16.4.4

中引入的，并被称为斜对称性。[①][②]在这种情况下，v_1，v_2 必定与 $-v_2$，$-v_1$ 一致；因此，$v_1=-v_2$，又由于 $v_1\geqq v_2$，$v_1\geqq 0$。但是，v' 必定与 $-v'$ 一致，所以，我们甚至能够断定

$$v'=0。$$[③]

这样，我们看到：一个对称博弈的一局的值是零。

应该注意，一个非对称的 Γ 的每一局博弈的值 v' 也能够是零。我们称 $v'=0$ 的博弈为公平的博弈。

14.7.2 和 14.7.3 的例子说明："石头、剪子、布"是对称的（从而是公平的）；"硬币配对"公平（见 17.1）而不对称。[④]

---

① 对于矩阵 $H(\tau_1,\tau_2)$ 或相应的双线性型 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$，对称性定义是

$$H(\tau_1,\tau_2)=H(\tau_2,\tau_1),$$

或等价于

$$K(\vec{\xi},\vec{\eta})=K(\vec{\eta},\vec{\xi})。$$

值得注意的是，博弈 Γ 的对称性等价于其矩阵或双线性型的斜对称性，而非对称性。——166，①

② 因此，斜对称性意味着，14.1.3 中图 15 的矩阵以其［由(1,1)、(2,2) 等组成的］主对角线为轴的翻转将这一矩阵变成它的负阵。（按照上面的脚注，对称性意味着这一反射将这一矩阵变成它自己。）

图 15 中的矩阵是矩形的，它有 β_2 列，β_1 行。在我们考虑的情况中，这一翻转必定不改变其形状，因此，它必定是正方形的，即 $\beta=\beta_2$。由于博弈 Γ 中的玩家 1 和玩家 2 具有相同角色，这是自然而然的事情。——166，②

③ 由于我们知道 $v'_1=v'_2$，这是当然的事情。如果没有这一点，即没有 16.4.3 的一般定理(16:F)，关于 v'_1，v'_2，我们就只能得到有关 v_1，v_2 的那些结论：$v'_1=-v'_2$，又由于 $v'_1\geqq v'_2$，所以 $v'_1\geqq 0$。——166，③

④ 在"硬币配对"游戏中，玩家 1 和玩家 2 有着不同的角色：玩家 1 试图对上，而玩家 2 试图避免对上。当然，我们也许认为，这一差异并不是基本的，"硬币配对"游戏的公平性归因于，其非对称性并不是基本性质。这是能够得到说明的，不过，我们不打算在这里进行。公平而非对称博弈的一个更好的例子将由这样一个博弈给出，它完全是非对称的，不过，其中每一位玩家的优势和劣势得到了明智的调整，以致有一个公平的博弈，即 $v'=0$。

在一个对称的博弈中，17.8 中的（17:B:a）和（17:B:b）的集合 $\overline{A}$、$\overline{B}$ 显然相等。由于 $\overline{A}=\overline{B}$，我们可以在 17.9 的最终准则（17:D）中令 $\vec{\xi}=\vec{\eta}$。我们将其重述如下： 167

（17:H）　在一个对称的博弈中，$\vec{\xi}$ 属于 $\overline{A}$ 的充分必要条件是：对于 $\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}$ 未（在 τ_2）取得其最小值的每一 $\tau_2=1,\cdots,\beta_2$，我们有 $\xi_{\tau_2}=0$。

一个不完全成功的例子是，通过"掷骰子"来构造这样一个博弈。在这一博弈中，玩家 1——"赌客"——掷两颗骰子，每个骰子有 6 个点数，它们是 1,2,3,4,5,6。因此，每掷一次，可能出现的总点数是 2,…,12。这些总点数有如下概率分布：

总点数	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
36 次中的机率	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
概率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

规则是，如果"赌客"掷出 7 或 11，他赢。如果他掷出 2,3 或 12，他输。如果他掷出其他点（4,5,6，或 8,9,10），那么，他继续掷，直到最初那个点数（他赢）重复出现，或出现一个 7 点（他输）。玩家 2（"赌场"）无法影响投掷过程。

尽管规则对玩家 1 和玩家 2 的影响有很大差异，他们的机率却十分接近：简单计算表明，495 局中，"玩家"对"赌场"机率比是 244 对 251，即一局博弈的值（每单位赌注）是

$$\frac{244-251}{495}=-\frac{7}{495}=-1.414\%。$$

因此，这相当接近公平。也许有人提出这样的问题，即是否再公平一些。——166，④

用 17.9 结语中的术语说，上述条件表达的是：$\vec{\xi}$ 是针对它本身的最优策略。

17.11.3 17.11.1，17.11.2 的结果 —— 即在每一对称博弈中，$v' = 0$—— 能够与 17.8 中的（17：C：d）结合起来。这样，我们有：

（17：I）　　在一个对称博弈中，无论对手如何玩，每一位玩家都能够通过恰当的玩法来避免损失。①

如果矩阵 $H(\tau_1,\tau_2)$ 是一个斜对称矩阵，那么，S_{β_1} 中存在一个向量 $\vec{\xi}$ 满足

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1} \geqq 0, \quad \tau_2 = 1,\cdots,\beta_2。$$

这一结果本来可以直接得到，因为它与 16.4.4 中的最后结果（16：G）一致。要理解这一点，只需在那里引入我们现在的符号：用我们的 $\tau_1,\tau_2,H(\tau_1,\tau_2)$ 替换那里的 i，j，$a(i,j)$，并用 $\vec{\xi}$ 替换那里的 $\vec{w}$。

168 我们甚至能够把我们的整个理论建立在这一事实之上，即从上述结果推出 17.6 的定理。换句话说，所有 Γ 的广义严格决定性能够从对称博弈的广义严格决定性推导出来。我们不在这里对之进行讨论，因为 17.6 的推导更直接。

在一个对称博弈中保护自己免受损失的可能性仅仅因为我们使用了混合策略 $\vec{\xi}$，$\vec{\eta}$ 而存在（见 17.7 末尾）。

① 即确保自己的所得 ≥ 0。——167，①

如果玩家被限于纯策略 τ_1,τ_2,那么,自己的策略被发现,从而持续损失的危险就会存在。要理解这一点,只需回想我们在“石头、剪子、布”中的发现(见 14.7 和 17.1.1)。19.2.1 中,联系到扑克和“诈叫”的必要性时,我们将认识到同样事实。

第4章 二人零和博弈的例子

18. 一些基本的博弈

18.1 最简单的博弈

169 **18.1.1** 我们已经完成了二人零和博弈的一般讨论。接下来,我们要研究此类博弈的一些例子。与我们的抽象讨论相比,这些例子更能够说明我们的理论各部分的真正意义。它们尤其表明,我们的理论给出的某些形式上的步骤可以有直接的常识性解释。这里,我们有 19.2、19.10 和 19.16 中将要提到的那些"实践"或"心理"现象的主要方面的严格形式化。①

18.1.2 首先,参数 β_1、β_2——即博弈的正规型中两位玩家面对的备择个数的大小——是博弈 Γ 的复杂程度的合理估计。其中之一或两者都是 1 的情况可以被忽略:

---

① 我们强调这一点,是因为人们广泛认为这些事情不适合严格(数学)研究。——169,①

这意味着，问题中的玩家没有选择余地，无法影响该博弈。[1] 因此，对我们来说，有意义的最简单此类博弈是

(18:1)　　$\beta_1 = \beta_2 = 2$

的情况。我们在 14.7 中看到，“硬币配对”就是这样的博弈，其矩阵由 13.4.1 中的图 12 给出。此类博弈的另一个例子是图 14。

现在，让我们考虑满足(18:1)，即图 27 所描述的最一般的博弈。如果“硬币配对”中的不同配对方法既不必代表相同收益（或根本不是收益），也不代表相同损失（或根本不是损失），那么，图 27 的描述也适用于“硬币配对”博弈。[2] 对于这种情况，我们建议讨论 17.8 的结果——博弈 Γ 的值和良策集合 $\overline{A}, \overline{B}$。这些概念已经由 17.8（基于 17.6 的定理）的一般存在性证明建立起来。不过，在这个具体例子中，我们将通过明确的计算重新得到它们，并进而更好地理解它们的作用和它们的可能性。 170

	1	2
1	H(1,1)	H(1,2)
2	H(2,1)	H(2,2)

图 27

18.1.3　关于图 27 给出的博弈，我们可以稍做调整，

① 因此，这一博弈实际上是一个人的博弈，当然不再是零和博弈。见 12.2。——169，②

② 图 12 和图 27 之间的比较说明，在“硬币配对”博弈中，$H(1,1) = H(2,2) = 1$（对上的收益）；$H(1,2) = H(2,1) = -1$（没有对上的损失）。——170，①

将使详细讨论大为简化。

首先,玩家 1 的两个备择之中的哪一个记为 $\tau_1=1$,哪一个记为 $\tau_1=2$,我们可以随意安排。我们可以交换它们,即交换矩阵的两个行。

第二,同样随意的是玩家 2 的两个选择的记号 $\tau_2=1$,$\tau_2=2$。我们也可以交换它们,即交换矩阵的两个列。

最后,两位玩家中的哪一个称为玩家 1 也是随意的,即用 $-H(\tau_1,\tau_2)$ 取代 $H(\tau_1,\tau_2)$(见 14.6 和 17.11)。这等于交换上述矩阵的行和列,并改变其元素的符号。

把这些事情结合起来,我们有 $2\times2\times2=8$ 种可能的调整,从根本上说,它们都描述同一博弈。

18.2 简单博弈的定量分析

18.2.1 现在,让我们开始严格的讨论。我们将考虑几种可能的"情况"。这些"情况"是按照 $H(\tau_1,\tau_2)$ 同时就两个变量 τ_1、τ_2 的最大值和最小值在矩阵中的各种可能的位置来区别的。乍一看,它们的界定似乎是随意的,但事实是,它们带来各种可能结果的一个敏锐分类。

相应地,考虑 $\text{Max}_{\tau_1,\tau_2}$ 和 $\text{Min}_{\tau_1,\tau_2}$。这两个值中的每一个将至少出现一次,也可能出现多次。[①] 不过,这不是我们此刻要关注的事情。下面,我们给出各种情况的定义:

---

① 在"硬币配对"中(见上面脚注①),$\text{Max}_{\tau_1,\tau_2}$ 是 1,并在(1,1)和(2,2)处取此值;而 $\text{Min}_{\tau_1,\tau_2}$ 是 −1,并在(1,2)和(2,1)处取此值。——170,②

18.2.2　情况(A)：$\mathrm{Max}_{\tau_1,\tau_2}$ 和 $\mathrm{Min}_{\tau_1,\tau_2}$ 发生的地方既不在同一行，也不在同一列。

通过交换 $\tau_1=1,2$ 和 $\tau_2=1,2$，我们能够使 $\mathrm{Max}_{\tau_1,\tau_2}$ 发生的地方是(1,1)；那么，$\mathrm{Min}_{\tau_1,\tau_2}$ 必定发生在(2,2)。因此，我们有 171

$$(18:2)\qquad H(1,1)\left\{\begin{matrix}\geqq H(1,2)\geqq\\ \geqq H(2,1)\geqq\end{matrix}\right\}H(2,2)。$$

故，(1,2)是一个鞍点。①

因此，在这种情况下，这一博弈是严格决定的，而且

$$(18:3)\qquad v'=v=H(1,2)。$$

18.2.3　情况(B)：不可能做出上述安排：

选择($\mathrm{Max}_{\tau_1,\tau_2}$，$\mathrm{Min}_{\tau_1,\tau_2}$)的两个位置，使它们位于同一行或同一列。如果它们本来位于同一行，那么，交换玩家 1 和玩家 2 就可以使这两个位置总是位于同一列。②

必要的话，通过交换 $\tau_1=1,2$ 和 $\tau_2=1,2$，我们能够把 $\mathrm{Max}_{\tau_1,\tau_2}$ 的位置移动到(1,1)，因此我们所指的行是 $\tau_1=1$。$\mathrm{Min}_{\tau_1,\tau_2}$ 必定出现在(2,1)。③ 所以，我们有：

$$(18:4)\qquad H(1,1)\left\{\begin{matrix}\geqq H(1,2)\geqq\\ \geqq H(2,2)\geqq\end{matrix}\right\}H(2,1)。$$

---

① 请回忆 13.4.2。注意，我们取(1,2)而不是(2,1)。——171，①

② 交换两位玩家会改变矩阵每一元素的符号(见上)，从而交换 $\mathrm{Max}_{\tau_1,\tau_2}$ 和 $\mathrm{Min}_{\tau_1,\tau_2}$。但不管怎样，它们总归位于同一列。——171，②

③ 严格地说：它也可以是(1,1)。这样的话，$H(\tau_1,\tau_2)$ 有相同的 $\mathrm{Max}_{\tau_1,\tau_2}$ 和 $\mathrm{Min}_{\tau_1,\tau_2}$，它必定是一个常数。因此，我们仍然能够说 $\mathrm{Min}_{\tau_1,\tau_2}$ 是(2,1)。——173，③

实际上，$H(1,1)=H(1,2)$ 或 $H(2,2)=H(2,1)$ 被排除了，因为那样意味着我们可以把 $\mathrm{Max}_{\tau_1,\tau_2}$ 和 $\mathrm{Min}_{\tau_1,\tau_2}$ 放在(1,2)，(2,1)或(1,1)，(2,2)，从而变成了情况(A)。[①]

这样，我们能够把(18:4)增强为：

(18:5) $$H(1,1)\left\{\begin{matrix} >H(1,2)\geqq \\ \geqq H(2,2)> \end{matrix}\right\}H(2,1)。$$

现在，我们必须对情况进一步分类：

18.2.4 情况(B_1)：

(18:6) $$H(1,2)\geqq H(2,2)$$

那么，(18:5)能够被增强为：

(18:7) $$H(1,1)>H(1,2)\geqq H(2,2)>H(2,1)。$$

从而，(1,2)再次成了一个鞍点。

因此，在这种情况下，该博弈还是严格决定的，而且

(18:8) $$v'=v=H(1,2)。$$

172 **18.2.5** 情况(B_2)：

(18:9) $$H(1,2)<H(2,2)$$

那么，(18:5)能够被增强为：

(18:10) $$H(1,1)\geqq H(2,2)>H(1,2)\geqq H(2,1)。$$[②]

该博弈不是严格决定的。[③]

然而，我们不难发现良策，即 $\overline{A}$ 中的一个 $\vec{\xi}$ 和 $\overline{B}$ 中的

---

① 正如"硬币配对"游戏中的情况那样，$H(1,1)=H(2,2)$ 和 $H(1,2)=H(2,1)$ 是完全可能的。见第 17 页脚注①和第 172 页脚注①。——171，④

② 这正是"硬币配对"的情况。见第 170 页脚注①和第 171 页脚注④。——172，①

③ 显然，$v_1=\mathrm{Max}_{\tau_1}\mathrm{Min}_{\tau_2}H(\tau_1,\tau_2)=H(1,2)$，$v_2=\mathrm{Min}_{\tau_2}\mathrm{Max}_{\tau_1}=H(2,2)$，故 $v_1<v_2$。——172，②

一个 $\vec{\eta}$ 满足 17.9 中的典型条件(17:D)。我们甚至能够再进一步:我们能够选择 $\vec{\eta}$ 使得 $\sum_{\tau_2=1}^{2} H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2}$ 对于所有的 τ_1 相同,并选择 $\vec{\xi}$ 使得 $\sum_{\tau_1=1}^{2} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1}$ 对于所有的 τ_2 相同。为此,我们要求:

$$(18:11)\quad \begin{cases} H(1,1)\eta_1 + H(1,2)\eta_2 = H(2,1)\eta_1 + H(2,2)\eta_2 \\ H(1,1)\xi_1 + H(2,1)\xi_2 = H(1,2)\xi_1 + H(2,2)\xi_2 \end{cases}$$

这意味着:

$$(18:12)\quad \xi_1:\xi_2 = H(2,2) - H(2,1) : H(1,1) - H(1,2),$$

$$\eta_1:\eta_2 = H(2,2) - H(1,2) : H(1,1) - H(2,1)。$$

我们必须满足这些比率,满足如下永久约束条件

$$\xi_1 \geqq 0,\quad \xi_2 \geqq 0\quad \xi_1 + \xi_2 = 1$$

$$\eta_1 \geqq 0,\quad \eta_2 \geqq 0\quad \eta_1 + \eta_2 = 1$$

是可能的,因为根据(18:10),上述比率[即右边是(18:12)]是正的。我们有:

$$\xi_1 = \frac{H(2,2) - H(2,1)}{H(1,1) + H(2,2) - H(1,2) - H(2,1)},$$

$$\xi_2 = \frac{H(1,1) - H(1,2)}{H(1,1) + H(2,2) - H(1,2) - H(2,1)}。$$

以及:

$$\eta_1 = \frac{H(2,2) - H(1,2)}{H(1,1) + H(2,2) - H(1,2) - H(2,1)},$$

$$\eta_2 = \frac{H(1,1) - H(2,1)}{H(1,1) + H(2,2) - H(1,2) - H(2,1)}。$$

我们甚至能够证明,$\vec{\xi}$ 和 $\vec{\eta}$ 是惟一的,即 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 不含有其他元素。

173 证明：如果 $\vec{\xi}$ 或 $\vec{\eta}$ 不是我们在上面找到的向量，那么，根据 17.9 的特征条件（17:D），$\vec{\eta}$ 或 $\vec{\xi}$ 必定分别有一个分量是 0。但这样的话，$\vec{\eta}$ 或 $\vec{\xi}$ 就会不同于上面的值，因为这些向量中两个分量都是正的。这样，我们看到：如果 $\vec{\xi}$ 和 $\vec{\eta}$ 之一不同于上面的值，那么，两者都不同于上面的值。从而两者必定都有一个分量是 0。两者的另一分量都是 1，即两者都是坐标向量。① 因此，两者所代表的 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 实际上是 $H(\tau_1,\tau_2)$ 的一个鞍点。见 17.9 中的（17:E）。这样，这一博弈就成了严格决定的，但我们知道此种情况下它不是。

证明完毕。

我们看到，（18:11）中的四个表达式有相同的取值，即

$$\frac{H(1,1)H(2,2)-H(1,2)H(2,1)}{H(1,1)+H(2,2)-H(1,2)-H(2,1)},$$

而且，根据 17.5.2 中的（17:5:a）和（17:5:b），这个值正是 v′。故，我们有

$$(18:13)\qquad v'=\frac{H(1,1)H(2,2)-H(1,2)H(2,1)}{H(1,1)+H(2,2)-H(1,2)-H(2,1)}。$$

18.3 定性的特征化描述

18.3.1 18.2 中的结果能够以多种方式概括，以使其含义更为明确。我们从下面的准则开始：

（1,1）和（2,2）组成图 27 中矩阵的一条对角线，

① {1,0}或{0,1}。——173,①

(1,2)和(2,1)则组成其另一条对角线。

我们说两个数集 E 和 F 是隔离的,意思是要么 E 的每一个元素都比 F 的每一个元素大,要么 E 的每一个元素都比 F 的每一个元素小。

考虑 18.2 的情况(A)、(B_1)和(B_2)。在前两种情况下,该博弈是严格决定的,而且矩阵一个对角线上的元素与另一对角线上的元素是隔离的。① 在后一种情况下,该博弈不是严格决定的,一条对角线上的元素与另一条对角线上的元素不是隔离的。②

因此,对角线隔离是一个博弈非严格决定的充分必要条件。这一准则的获得符合 18.2 中运用的 18.1.3 的调整。但是,18.1.3 中描述的三个调整过程既不影响严格决定性,也不影响对角线隔离。③ 因此,我们的第一个准则总是成立的。我们将其重述如下:

(18:A)　一个博弈是非严格决定的,当且仅当矩阵的一条对角线上的元素与另一条对角线上的元素是隔离的。 174

18.3.2　在情况(B_2)中,即当一个博弈是非严格决定的情况下,我们找到的 $\overline{A}$ 中惟一的 $\vec{\xi}$ 和 $\overline{B}$ 中惟一的 $\vec{\eta}$ 的两个分量都不等于 0。这一事实以及上述惟一性都不受

① 情况(A):由(18:2),$H(1,1) \geq H(1,2) \geq H(2,2)$。情况($B_1$):由(18:7),$H(1,1) > H(1,2) \geq H(2,2)$。——173,②

② 情况(B_2):由(18:10),$H(1,1) \geq H(2,2) > H(1,2) \geq H(2,1)$。——173,③

③ 前者是明显的,因为这些只是记号上变化。后者即将得到证明。——173,④

18.1.3 描述的调整的影响。[1] 所以，我们有：

(18:B) 如果该博弈是非严格决定的，那么，存在着惟一一个良策 $\vec{\xi}$（即属于 $\overline{A}$）和惟一一个良策 $\vec{\eta}$（即属于 $\overline{B}$），而且两者的所有分量都是正的。

根据(18:B)，$\vec{\xi}$ 和 $\vec{\eta}$（$\vec{\xi}$ 属于 $\overline{A}$，$\vec{\eta}$ 属于 $\overline{B}$）的分量都不会是0。因此，17.9 的准则表明，(18:11)前面的说法——当时的充分条件而非必要条件——现在成了（充分）必要条件。从而，(18:11)必定得到满足，它的所有结果都是正确的。这尤其适用于(18:11)之后给定的 ξ_1、ξ_2、η_1、η_2 值，以及(18:13)中给定的 v′的值。从而，只要该博弈不是严格决定的，所有这些描述都适用。

18.3.3 下面，我们描述另一个准则：

在一个一般矩阵 $H(\tau_1,\tau_2)$（见第9页图15，我们暂时允许任意的 β_1、β_2）中，我们说一行（如 τ'_1）或一列（比如 τ'_2）分别优于另一行（比如 τ''_1）或列（比如 τ''_2），意思是对于所有 τ_2，$H(\tau'_1,\tau_2) \geqq H(\tau''_1,\tau_2)$；或对于所有 τ_1，$H(\tau_1,\tau'_2) \geqq H(\tau_1,\tau''_2)$。

这一概念的一个简单含义是：它意味着，无论对手做出什么选择，对于玩家1来说，选择 τ'_1 至少与选择 τ''_1 一样好——或对于玩家2来说，选择 τ'_2 至少与选择 τ''_2 一样好。[2]

---

① 这些也即将得到证明。——174，①

② 这当然是一种例外情况：一般来说，两个备择的相对优劣依赖于对手的选择。——174，②

现在，让我们回到 $\beta_1=\beta_2$ 的情况。重新考虑 18.2 中的情况（A）、（B_1）和（B_2）。在前两种情况下，一个行或一个列优于另一个行或列。[①] 在最后一种情况下，都不成立。[②]

因此，一个行或一个列优于另一行或列是博弈 Γ 被严格决定的充分必要条件。像我们的第一个准则那样，这服从于 18.2 中运用了 18.1.3 中做出的调整。而且，正如那里说明的那样，这些调整过程既不影响严格决定性，也不影响行或列的优化。因此，我们当前的准则也总是成立的。我们将其重述如下：

（18：C）　　博弈 Γ 是严格决定的，当且仅当一个行或一个列优于另一个行或列。

18.3.4　条件（18：C）是严格决定性的充分条件，这 175
并不令人吃惊：它意味着，对于两位玩家之一来说，他的可能选择之一总是至少与另一选择一样好（见上）。因此，他知道做什么，而他的玩家也知道将会发生什么，这就隐含着严格决定性。

当然，这些分析隐含着寄希望于另一位玩家的理性行为的投机心理，这是我们最初的讨论没有考虑的。15.8 开头和末尾的说明在一定程度上适用于这一简单得多的情况。

在结果（18：C）中，我们真正关心的是，这一条件的必要性也是成立的，也就是说，没有什么比行或列的优化能

---

① 情况（A）：由（18：2），第一列优于第二列。情况（B_1）：由（18：7），第一行优于第二行。——174，③

② 情况（B_2）：不难验证，（18：10）排除了所有四种可能性。——174，④

够导致严格决定性这件事情更为微妙。

应该牢记的是，我们正在考虑的是最简单的情况：$\beta_1=\beta_2=2$。我们将在 18.5 中看到，当 β_1,β_2 变大时，各个方面的条件如何纠缠在一起。

18.4 具体例子：硬币配对的推广

18.4.1 下面是 18.2 和 18.3 的结果的一些应用。

(a)普通的“硬币配对”，其中图 27 中的矩阵 H 由第 94 页的图 12 给定。我们知道，这一博弈的值是

$$v'=0,$$

且有惟一的良策

$$\vec{\xi}=\vec{\eta}=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}。$$

（见 17.1。18.2 的公式直接给出这一结果。）

18.4.2 (b)“硬币配对”游戏，其中对上“正面”的奖励加倍。因此，图 27 中的矩阵将不同于图 12 中的矩阵，位置(1,1)的元素加倍了：

	1	2
1	2	-1
2	-1	1

图 28a

这一矩阵的对角线是隔离的(1 和 2 大于 -1)，因此良策是惟一的，而且是混合策略［见(18:A)，(18:B)］。根据 18.2.5 中情况(B_2)中的相关公式，我们有

$$v' = \frac{1}{5},$$

和良策

$$\vec{\xi} = \{\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\} \qquad \vec{\eta} = \{\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\}。$$

我们将会看到，对上"正面"的奖品加倍增加了试图对上"正面"的玩家 1 的该博弈一次博弈的值。这也导致 176
他降低出"正面"的频率，因为这时的奖品使得这一选择变得明显了，从而也变得危险了。对上"正面"招致额外损失这一直接威胁以同样方式影响着玩家 2。这一口头文字论述有着明显的合理性，但肯定是不严格的。然而，我们给出这一结果的公式是严格的。

18.4.3 (c)"硬币配对"，其中对上"正面"的奖品加倍，但玩家 1 出"正面"而没有对上受到的惩罚变成原来的三倍。图 27 中的矩阵变成

	1	2
1	2	-3
2	-1	1

图 28b

两条对角线是隔离的（1 和 2 大于 -1，-3），所以良策是惟一的，且是混合策略（见上）。我们前面用过的公式给出这一博弈的值

$$v' = -\frac{1}{7},$$

和良策

$$\vec{\xi}=\left\{\frac{2}{7},\frac{5}{7}\right\},\qquad \vec{\eta}=\left\{\frac{4}{7},\frac{3}{7}\right\}。$$

请读者给出这一结果的像前面那样的口头解释。沿着这一思路，不难构建其他这类例子。

18.4.4 (d)我们在18.1.2中看到，“硬币配对”游戏的这些变形是最简单的二人零和博弈。借助这一环境条件，它们获得了一定的一般意义，并由18.2和18.3中的结果给予了证实：的确，我们在那里看到，这类博弈以最简单的形式给出了严格决定性和非严格决定性的条件。需要补充的一点是，这些博弈与“硬币配对”游戏的联系只强调了一个特殊方面。现实中，以不同外表出现的很多其他博弈都可以归为这一类。下面就是一个这样的例子：

这个博弈取自《福尔摩斯历险记》中的一个情节。①②

177 福尔摩斯想从伦敦到多佛尔，然后到欧洲大陆，以逃避追踪他的莫利埃蒂教授。上了火车，当火车缓缓驶离车站时，他发现莫利埃蒂出现在月台上。福尔摩斯理所当然地认为——这里，假设他充分理智——他的对手也看到了他，并有可能乘坐特快列车追上他。现在，福尔摩斯有两种选择：继续去多佛尔，或就近在坎特伯雷站下车。他那

---

① 柯南道尔：《福尔摩斯历险记》，纽约，1938，第550—551页。——176，①

② 这种情形当然可以看作实际生活中很多可能冲突的范型。摩根斯顿(O. Morgenstern)对此进行了详细说明：*Wirtschaftsprognose*，维也纳，1928，第98页。

作者并不抱有上述著作或“Vollkomene Voraussicht und wirtschaftliches Gleichgewicht”(载 *Zeitschrift für Nationalökonomie*, Vol.6, 1934)中乐观的观点。相应地，我们的解将回答门格尔如下著作中的疑问：Neuere Fortschritte in den exacten Wissenschaften，“Einige neuere Fortschritte in der exacten Behandlung Socialwissenschaftlicher Probleme，”维也纳，1936，第117页和第131页。——176，②

足够聪明的对手也会想到这些，从而也有同样的两个选择机会。这两位对手都必须在不知道对方的决策的情况下选择自己的下车地。作为这些选择的结果，如果他们最终出现在同一月台上，那么，福尔摩斯将会被莫利埃蒂杀掉。如果福尔摩斯安全到达多佛尔，他就可以顺利逃脱。

尤其对于福尔摩斯来说，良策是什么呢？显然，这个游戏与“硬币配对”有着一定的相似性。莫利埃蒂是那个想“对上”的玩家。因此，我们假设他是玩家 1，福尔摩斯是玩家 2。用 1 记到达多佛尔，用 2 记中途下车。（这对 τ_1 和 τ_2 都适用。）

接下来，我们考虑图 27 中的矩阵。位置(1,1)和(2,2)对应着莫利埃蒂追上福尔摩斯，因此对应有一个很大的矩阵元素值，如 100。位置(2,1)表示福尔摩斯成功逃到多佛尔，而莫利埃蒂在中途下了车。这是莫利埃蒂的失败，用一个负的矩阵元素描述，如 -50——在排序中，小于上述正值。位置(1,2)表示福尔摩斯在中间站避开了莫利埃蒂，但他未能到达大陆。这最好算作一个平手，并用取值 0 的矩阵元素描述。

矩阵 H 由图 29 给出：

	1	2
1	100	0
2	-50	100

图 29

如上面(b)、(c)描述的那样，对角线是隔离的（100 >

0，-50)。因此，良策是惟一的，且是混合策略。前面用过的公式给出莫利埃蒂的值

$$v' = 40$$

178 和二人的良策(莫利埃蒂的 $\vec{\xi}$，福尔摩斯的 $\vec{\eta}$)：

$$\vec{\xi} = \left\{\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right\}, \quad \vec{\eta} = \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\}。$$

因此，莫利埃蒂应该以 60% 的概率去多佛尔，而福尔摩斯应该以 60% 的概率中途下车，每一情况下的剩余概率都是 40%。①

18.5 更复杂一些的例子

18.5.1 我们在 17.8 中描述的二人零和博弈的一般解把一些特殊的选择机会和概念变成了如下情形：有无严格决定性，一次博弈的值 v′，和良策集 $\overline{A}, \overline{B}$。由于有了这些，我们得到了 18.2 中十分简单而明确的特征和特征值。在 18.3 中重述这些结果时，这些变得尤其突出。

这一简单性甚至有可能导致某些误解。事实上，18.2，18.3 的结果是通过最基本的明确计算而得到的。18.3 中有关严格决定性的组合准则(18:A)，(18:C)，至少就其最终形

---

① 柯南道尔讲述的故事不考虑混合策略而给出实际使用的策略。据此，福尔摩斯中途下了车，并带着胜利的微笑看着莫利埃蒂的特快列车奔向多佛尔。柯南道尔的答案在纯策略中是最好的，他给每一对手安排了我们发现是最可能的策略(即用肯定性取代 60% 的概率)。然而，这一过程导致福尔摩斯全胜似乎有点不对劲，因为如我们在上面看到的那样，这一局面肯定有利于莫利埃蒂。(当福尔摩斯乘坐的火车驶出维多利亚车站时，我们关于 $\vec{\xi}$ 和 $\vec{\eta}$ 的结果是福尔摩斯有 48% 的取胜概率。)——178，①

式来说，比我们此前有的东西都直接得多。这会使人产生这样的疑问：17.8 的分析（和 14.5 的严格决定性情况下的相应分析）是否包含着某种我们需要的东西呢？尤其因为它们的基础都是 17.6 的数学定理，而这一定理以第 16 节中的直线性和凸性为必要条件。如果所有这些能够用 18.2，18.3 那样的讨论取而代之，那么第 16 和第 17 节中我们的讨论方式从总体上说就变得不合理了。①

事情并非如此。如我们在 18.3 末尾指出的那样，18.2 和 18.3 的过程的极大简单性和结果归因于这样一个事实，即它们只适用于最简单类型的二人零和博弈："硬币配对"一类的游戏，其特征是 $\beta_1=\beta_2=2$。对于一般情况，第 16、17 节的较抽象分析似乎是必不可少的。

下面我们用 β 取值较大的例子来说明 18.2 和 18.3 的结论如何不成立。这也许有助于理解这些事情。 179

18.5.2　我们只须考虑 $\beta_1=\beta_2=3$ 的情况。事实上，它们将联系到"硬币配对"游戏，通过引入第三个选择而变得更一般一些。

因此，两位玩家将各有选择 1，2，3（即 τ_1,τ_2 的值）。读者可以设想选择 1 代表"正面"，选择 2 代表"反面"，选择 3 代表"取消"之类的事情。玩家 1 仍试图"对上"。如果两位玩家之一"取消"，那么，对方出"正面"或"反面"都无所谓。惟一重要的事情是，他是否选择出硬币，或是否也"取消"。因此，我们现在有图 30 那样的矩阵：

---

① 它自然缺乏严格性，不过对于这一初步问题使用大量的数学是没有必要的。——178，②

τ_1 \ τ_2	1	2	3
1	1	−1	γ
2	−1	1	γ
3	α	α	β

图 30

前面的四个元素——前两行的前两个元素——类似于“硬币配对”游戏(见图12)。取值 α 的两个元素代表玩家1“取消”而玩家2没有“取消”。取值 γ 的两个元素代表着相反的情况。取值 β 的元素代表两位玩家都“取消”。通过赋予适当的值(正的、负的或零),能够给予这类情况出现时的惩罚,或使其没有差异。

通过特殊的安排,即选择适当的 α,β,γ 的值,我们能够得到我们想要的任何例子。

18.5.3 我们想说明的是,18.3的结果(18:A)、(18:B)和(18:C)无一是一般地正确的。

关于(18:C):这一严格决定性准则显然联系着 $\beta_1=\beta_2=2$ 的特殊情况:对于更大的 β_1,β_2 值,两条对角线甚至没有穷尽这个矩阵,从而发生在对角线上的事情不能够像从前那样描述整个博弈。

关于(18:B):我们将给出一个非严格决定博弈的例子,但存在一个良策,它对于玩家之一是一个纯策略(当然不是另一玩家的良策)。在这个例子中,更为奇妙的是,玩家之一有若干个良策,而另一个玩家却只有一个良策。

180 在图30的博弈中,我们选择 α,β,γ 的值为:

τ_2 \ τ_1	1	2	3
1	1	-1	0
2	-1	1	0
3	α	α	$-\delta$

图 31

$\alpha>0,\delta>0$。请读者自己决定哪一组合的"取消"受到奖励或受到惩罚。

下面用准则 17.8 对这一博弈进行详细讨论。

对于 $\vec{\xi}=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\}$，总有 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})=0$，即这一策略不可能使玩家 1 遭受损失。因此，$v'\geqq0$。对于 $\vec{\eta}=\vec{\delta}^{3}=\{0,0,1\}$，$K(\vec{\xi},\vec{\eta})\leqq0$[①]，即这一策略不可能使玩家 2 遭受损失。故，$v'\leqq0$。所以，我们有

$$v'=0。$$

因此，$\vec{\xi}$ 是一个良策，当且仅当总有 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})\geqq0$；$\vec{\eta}$ 是一个良策，当且仅当总有 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})\leqq0$。[②] 不难看出，要前者成立，当且仅当

$$\xi_1=\xi_2=\frac{1}{2},\xi_3=0。$$

要后者成立，当且仅当

---

① 实际上，它等于 $-\delta\xi_3$。——180，①

② 我们将这些讨论的简单口头解释留给读者。——180，②

$$\eta_1 = \eta_2 \leqq \frac{\delta}{2(\alpha+\delta)}, \qquad \eta_3 = 1 - 2\eta_1。$$

因此，良策 $\vec{\xi}$ 的集合 $\bar{A}$ 恰恰包含一个元素，且不是一个纯策略。相反，良策 $\vec{\eta}$ 的集合却包含无穷多个策略，其中之一是纯策略，即 $\vec{\eta} = \vec{\delta}^3 = \{0,0,1\}$。借助图 21 那样的图形描述（见图 32、图 33），集合 $\bar{A}, \bar{B}$ 是能够想像得到的。

关于（18:C）：我们将给出这样一个例子，它是严格决定的，但其中既不存在一个行优于另一个行，也不存在一个列优于另一个列。实际上，我们将做得更多。

18.5.4 暂时地，我们允许 β_1 和 β_2 取任何值。行或列的优化的意义已经在 18.3 末尾考虑过。它意味着，玩家之
181 一选择他看好的可能选择之一似乎有一个简单直接的动机，这以某种方式缩小了范围，并最终联系到严格决定性。

特别地：如果行 τ'_1 优于行 τ''_1，即如果对所有 τ_2，$H(\tau''_1, \tau_2) \leqq H(\tau'_1, \tau_2)$，那么，玩家 1 永远不必考虑选择 τ''_1，因为对他来说，τ'_1 在任何情况下都至少不差。而且：如果列 τ''_2 优于列 τ'_2，即对每一 τ_1，$H(\tau_1, \tau''_2) \geqq H(\tau_1, \tau'_2)$，那么，玩家 2 永远不必考虑选择 τ''_2，因为 τ'_2 在任何情况下都至少不差。（见上面提到的地方，尤其见第 174 页脚注②。）

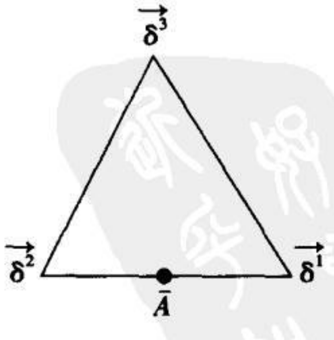


图 32

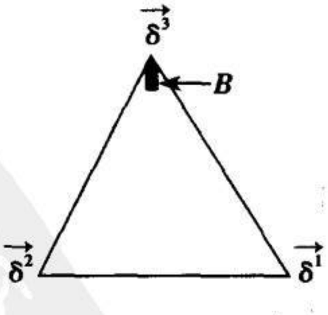


图 33

现在，我们可以利用一个更一般的结构：如果行 τ''_1，即玩家 1 的对应于 τ''_1 的纯策略 $\tau'_1 \neq \tau''_1$ 行的平均——即一个混合策略 $\vec{\xi}$——占优，且 $\vec{\xi}$ 具有分量 $\xi_{\tau''_1}=0$，那么，显然，玩家 1 永远无须考虑选择 τ''_1，因为其他 τ'_1 在任何情况下都不比 τ''_1 差。这种情况的数学表达是

$$(18:14:a)\quad \begin{cases} H(\tau''_1,\tau_2) \leqq \sum\limits_{\tau_1=1}^{\beta_1} H(\tau_1,\tau_2)\xi_{\tau_1} \qquad \tau_2=1,\cdots,\beta_2 \\ \vec{\xi} \text{ 属于 } S_{\beta_1},\quad \xi_{\tau''_1}=0。\end{cases}$$

对于玩家 2 来说，如果列 τ''_2——即玩家 2 的对应着 τ''_2 的策略——被 $\tau'_2 \neq \tau''_2$ 的行的平均——一个具有分量 $\eta_{\tau''_2}=0$ 的混合策略 $\vec{\eta}$——占优，那么，相应情况出现。这种情况的数学表达是

$$(18:14:b)\quad \begin{cases} H(\tau_1,\tau''_2) \geqq \sum\limits_{\tau_2=1}^{\beta_2} H(\tau_1,\tau_2)\eta_{\tau_2} \qquad \tau_1=1,\cdots,\beta_1 \\ \vec{\eta} \text{ 属于 } S_{\beta_2},\quad \eta_{\tau''_2}=0。\end{cases}$$

结论与上面类似。

因此，在(18:14:a)或(18:14:b)发生的博弈中，玩家之一的选择范围可以合理地缩小。① 182

18.5.5 接下来，我们要说明的是，(18:14:a)，(18:

---

① 这当然是一个笼统的试探性说明。我们并不真的需要它，因为我们已经有 14.5 和 17.8 的讨论。我们也许会猜到，它能够被用于取代或至少简化那些讨论。但是，我们即将在下面给出的一个例子将使这一希望破灭。

存在得到这些结果的另一种思路：如果(18:14:a) 或(18:14:b) 成立，那么，其与 17.8 的结合能够被用于获得有关良策集合 $\overline{A},\overline{B}$ 的信息。我们不打算在这里讨论这个题目。——182，①

14:b)的适用范围是十分有限的:我们将给出一个严格决定的博弈,其中,(18:14:a),(18:14:b)都不成立。

让我们回到图 30 那种类型的博弈($\beta_1 = \beta_2 = 3$)。我们取 $0 < \alpha < 1, \beta = 0, \gamma = -\alpha$:

τ_1 \ τ_2	1	2	3
1	1	-1	$-\alpha$
2	-1	1	$-\alpha$
3	α	α	0

图 34

请读者自己确定哪一个组合的"取消"受到奖励或受到惩罚。

下面是这一博弈的详细讨论:

元素(3,3)显然是鞍点,所以这一博弈是严格决定的,且

$$v = v' = 0。$$

借助 18.5.3 中使用的方法,不难看出,良策 $\vec{\xi}$ 的集合 $\overline{A}$ 和 $\vec{\eta}$ 的集合 $\overline{B}$ 都只包含一个元素:纯策略 $\vec{\delta}^3 = \{0,0,1\}$。

另一方面,要验证(18:14:a)和(18:14:b)不成立,即图 34 中任何一行都不被其他两行的平均占优,任何一列也不被其他两列的平均占优时,读者将会遇到小的麻烦。

18.6 机会和不完美信息

18.6.1 上面讨论的例子弄清楚了的是,几率——严格说是概率——在一个博弈中的作用未必显著,它是由博

弈规则给定的。图 27 和图 30 描述的博弈就有着不给出概率的规则；所有动作都是个人动作。[①] 然而，我们发现，它们中的大多数不是严格决定的，即它们的良策是混合策略，涉及概率的明确使用。 183

另一方面，我们关于那些有着完美信息的博弈的分析表明，这些博弈总是严格决定的，即它们有良策，且是纯策略，根本不涉及概率（见第 15 节）。

因此，从玩家行为——要使用的策略——的角度看，重要的是博弈是否是严格决定，其中是否包含机会动作并不重要。

第 15 节中关于有着完美信息的博弈的结果表明，严格决定性与支配玩家信息状况的规则之间存在着密切联系。为清楚说明这一点，尤其要说明机会动作出现与否基本上是无关紧要的，我们将证明：在每一（二人零和）博弈中，任一机会动作都能够被个人动作的一个组合取代，这一博弈的可能策略完全没变。有必要允许规则中包括玩家的不完美信息，但我们要证明的是：不完美信息包括明确的机会动作的所有可能结果。[②]

---

① 所有博弈简化为正规型甚至说明得更多：它证明了，每一博弈等价于一个没有机会动作的博弈，因为正规型只包含个人动作。——183，①

② 如 11.1 中描述的那样，引人（纯）策略和裁判的选择之后，存在着直接消除机会动作的一个直接方法。事实上，作为把一个博弈变成其正规型的最后一步，我们通过明确引人 11.2.3 中的期望值消除了机会动作。

但是，我们希望在不严重改变博弈结果的情况下消除机会动作。我们将用一个个人动作（我们将会看到是两个动作）取代一个机会动作，这样，它们各自在玩家策略的决定中的作用将保持不变，且可逐一评价。关于涉及到的结构问题，这一详细处理较上面提到的总结将会给出一个清楚的概念。——183，②

18.6.2 让我们考虑一个(二人零和)博弈 Γ 和其中的一个机会动作 M_κ[①] 像正常情况那样,借助 $\sigma_\kappa = 1, \cdots, \alpha_\kappa$ 列举选择机会,并假设它们的概率 $p_\kappa^{(1)}, \cdots, p_\kappa^{(\alpha_\kappa)}$ 都等于
184 $1/\alpha_\kappa$。[②] 现在,用两个个人动作 M'_κ, M''_κ 取代 M_κ。M'_κ, M''_κ 分别是玩家 1 和玩家 2 的个人动作。两者都有 α_κ 个选择机会。我们用 $\sigma'_\kappa = 1, \cdots, \alpha_\kappa$ 和 $\sigma''_\kappa = 1, \cdots, \alpha_\kappa$ 记相应的选择。这些动作以什么样的顺序排列无关紧要,但我们假定两个都必须是在没有有关其他动作(包括 M'_κ, M''_κ)的信息的情况下做出的。我们用这一矩阵定义一个函数 $\delta(\sigma', \sigma'')$。[见图 35。矩阵元素是 $\delta(\sigma', \sigma'')$。[③]] M'_κ, M''_κ——即相应个人选择 σ', σ''——对这一博弈的影响就好像 M_κ 本来有的选择是对应着(机会)选择 $\sigma_\kappa = \delta(\sigma', \sigma'')$。我们将这一新的博弈记为 Γ^*。我们声明,Γ^* 与 Γ 有相同的可能策略。

---

① 就目前而言,M_κ 的特征是否依赖于此前的博弈进程并不重要。——183,③

② 这并不失一般性。要理解这一点,假设问题中的概率取任一合理值,如 $r_1/t, \cdots, r_{\alpha_\kappa}/t$($r_1, \cdots, r_{\alpha_\kappa}$ 和 t 是正整数)。(这里事实上有一个缺陷,不过不太严重,因为任何概率都能够用有理数近似。)

现在,修改机会动作 M_κ,使其有 $r_1 + \cdots + r_{\alpha_\kappa} = t$ 个备择(而不是 α_κ 个)。记为 $\sigma'_\kappa = 1, \cdots, t$(而不是 $\sigma_\kappa = 1, \cdots, \alpha_\kappa$)。这样,$\sigma'_\kappa$ 的第一个值 r_1 中的每一个都像 $\sigma_\kappa = 1$ 那样对这一博弈有相同影响;σ'_κ 的第二个值 r_2 中的每一个都像 $\sigma_\kappa = 2$ 那样对这一博弈有相同影响,如此等等。那么,赋予所有 $\sigma'_\kappa = 1, \cdots, t$ 相同概率 $1/t$ 如同赋予 $\sigma_\kappa = 1, \cdots, \alpha_\kappa$ 最初的概率 $r_1/t, \cdots, r_{\alpha_\kappa}/t$。——183,④

③ $$\delta(\sigma', \sigma'') \begin{cases} = \sigma' - \sigma'' + 1 & \sigma' \geqq \sigma'' \\ = \sigma' - \sigma'' + 1 + \alpha_\kappa & \sigma' \leqq \sigma'' \end{cases}$$

因此,$\delta(\sigma', \sigma'')$ 总是数 $1, \cdots, \alpha_\kappa$ 之一。——184,①

σ' \ σ''	1	2	………	$\alpha_\kappa - 1$	α_κ
1	1	α_κ	………	3	2
2	2	1	………	4	3
·	·	·	………	·	·
·	·	·	………	·	·
·	·	·	………	·	·
$\alpha_\kappa - 1$	$\alpha_\kappa - 1$	$\alpha_\kappa - 2$	………	1	α_κ
α_κ	α_κ	$\alpha_\kappa - 1$	………	2	1

图 35

18.6.3　事实上：让玩家 1 在 Γ^* 中使用 Γ 的一个固定不变的混合策略，进一步指定动作 M'_κ①，选择 $\sigma' = 1, \cdots, \alpha_\kappa$ 的概率都是 $1/\alpha_\kappa$。那么，从玩家 2 的角度看，有着玩家 1 的这一策略的博弈 Γ^* 如同博弈 Γ。这是因为，在 M''_κ（即任意 $\sigma''_\kappa = 1, \cdots, \alpha_\kappa$）时，他的任何选择产生等于最初的机会动作 M_κ 的结果：图 35 表明，矩阵的第 $\sigma'' = \sigma''_\kappa$ 列恰好包含 $\sigma = \delta(\sigma', \sigma'') = 1, \cdots, \alpha_\kappa$ 各一次，即 $\delta(\sigma', \sigma'')$ 将按照相同概率 $1/\alpha_\kappa$ 取值 $1, \cdots, \alpha_\kappa$（应归于玩家 1 的策略），就好像 M_κ 本来应该的那样。这样，从玩家 1 的角度看，Γ^* 与 Γ 一样好。

交换玩家 1 和玩家 2，从而图 35 中的行起到列的作 185
用，相同论述表明，从玩家 2 的角度看，Γ^* 也至少与 Γ 一样好。

① M'_κ 是他的个人动作，所以他的策略必须给出。在 Γ 中不存在这一必要，因为 M_κ 是一个机会动作。——184，②

由于两位玩家的立场是对立的，这意味着，Γ^* 与 Γ 等价。[①]

18.7 上述结果的解释

18.7.1 把 18.6.2 和 18.6.3 的运算重复用于 Γ 的所有机会动作，它们都会被消除，从而证明 18.6.1 的最终意图。借助实例进行讨论将有助于更好地理解这一结果。

(A) 考虑如下相当基本的"机会"博弈。两位玩家借助一个 50%—50% 的机会装置决定下一单位由谁支付。用 18.6.2，18.6.3 的工具将这一只有一个机会动作的博弈转换为一个有两个个人动作的博弈。在图 35 中，令 $\alpha_\kappa = 2$，$\delta(\sigma', \sigma'')$ 值 1，2 用实际支付 1，-1 替换，这一矩阵就变成了图 12 中的矩阵。回忆 14.7.2 和 14.7.3，我们看到，这正是"硬币配对"游戏。

也就是说："硬币配对"是借助个人动作和不完备信息产生概率 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$ 的工具。（回忆 17.1！）

(B) 修改 (A)，允许"平手"：两位玩家借助一个 $33\frac{1}{3}\%$，$33\frac{1}{3}\%$，$33\frac{1}{3}\%$ 的概率装置决定下一单位由谁支付，或没有任何人支付。再次应用 18.6.2、18.6.3。现在，图 35 中的矩阵中 $\alpha_\kappa = 3$，$\delta(\sigma', \sigma'')$ 值 1，2，3 由实际支付

---

① 我们请读者把这些分析转换为第 11 节以及 17.2 和 17.8 中的严格形式：这并不困难，只不过烦琐而已。我们希望，上述文字论述清楚而简单地说明了我们考虑的现象的基本道理。——185，①

0,1,-1替代,该矩阵等于图 13 中的矩阵。由 14.7.2 和 14.7.3,我们看到,这正是"石头、剪子、布"游戏。

也就是说:"石头、剪子、布"通过个人动作和不完全信息产生概率$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{3}$的工具。(回忆 17.1!)

18.7.2 (C)图 35 的 $\delta(\sigma',\sigma'')$ 能够用另一个函数取代,而且值域 $\sigma'=1,\cdots,\alpha_\kappa$ 和 $\sigma''=1,\cdots,\alpha_\kappa$ 能够用其他值域 $\sigma'=1,\cdots,\alpha'_\kappa$ 和 $\sigma''=1,\cdots,\alpha'_\kappa$ 替换,条件是:图 35 中的矩阵的每一行包含数 $1,\cdots,\alpha_\kappa$ 中每一个相同次数。① 且每一行包含数 $1,\cdots,\alpha_\kappa$ 中的每一个相同次数。② 事实上,18.6.2 的分析也只用到了 $\delta(\sigma',\sigma'')$(和 $\alpha'_\kappa,\alpha''_\kappa$)的这两个性质。

不难看出,在开始玩牌之前,谨慎"抽牌"就属于这一范畴。当 52 张牌之一必须由一个机会动作选择时,概率是$\frac{1}{52}$。这实际上是通过洗牌来实现的。这是一个机会动作,但如果洗牌的玩家不诚实,这就变成了他的个人动作。为了防止他的不诚实,允许另一位玩家指定洗 186
过的牌从何处开始取牌,即在那一位置"抽牌"。这两个动作(尽管它们是个人动作)的组合等价于最初倾向于的机会动作。当然,缺乏信息也是这一方法有效的必要条件。

这里,$\alpha_\kappa=52$,$\alpha'_1=52!$ = 这副牌可能摆出的个数,

---

① $\alpha'_\kappa/\alpha_\kappa$ 倍。因此,α'_κ 必定是 α_κ 的一个倍数。——185,②

② $\alpha''_\kappa/\alpha_\kappa$ 倍。因此,α''_κ 必定是 α_κ 的一个倍数。——185,③

$\alpha''=52$是"抽牌"的位置的个数。我们请读者完成这些细节,并选择这一例子中的$\delta(\sigma',\sigma'')$。[①]

19. 扑克与诈叫

19.1 扑克游戏描述

19.1.1 我们已多次强调,18.3中讨论的,尤其是18.4中较具体地讨论的$\beta_1=\beta_2=2$的情况只涉及最简单的二人零和博弈。接着,我们在18.5中给出了一些复杂例子,这些复杂性能够出现在一般二人零和博弈之中,但是,为了更好地理解我们的一般结果(即17.8)的含义,我们可以讨论一个更为复杂的博弈。对于$\beta_1=\beta_2=2$的情况,这一点尤其需要,因为在这种情况下,被称之为(纯)策略的τ_1,τ_2的选择很少配得上这个名称:将其称为"动作"并不夸张。事实上,在这些极其简单的情况下,扩展型与正规型之间很难有任何差异,从而动作与策略的等同性是这些博弈的正规型的一个特征。下面,我们将利用扩展型来分析一个博弈,其中的玩家有若干动作,从而,从扩展型向正规型和策略的过渡不再是一个空的运算。

---

① 我们假设了,洗牌只被用于产生一张牌。如果整副牌都要用到,那么,"抽牌"并不绝对安全。一位不诚实的洗牌者产生牌张之间的一定关系,"抽牌"无法破坏这一关系。这样,这方面的知识会使这位洗牌者合理地占有优势。——186,①

19.1.2 我们要严格讨论的是扑克。①② 然而，实际中的扑克实在是一个过于复杂的题目，不可能做出详尽的分析，因此我们不得不对其进行适当的简化性修改。有些修改甚至相当大。③ 对于我们来说，在我们的简单模型中，扑克的基本概念和关键性质总归要保留下来。因此， 187

---

① 这是一种很流行的扑克牌游戏，多用于赌博，其名称很多。有的地方称其为"拖拉机"。目前最为流行的互联网游戏网站将其称为梭哈。——译者注

② 关于扑克的一般分析以及将要在下面给出的对其不同变形的数学讨论是由冯·诺伊曼于 1926—1928 年完成的，但此前没有公开发表。[见"Zur Theorie der Gesellschaftsspiele," Math. ann. , Vol. 100(1928)中的参考文献。]这尤其适用于 19.4—19.10 的对称型变种，19.11—19.13 的(A)，(B)和在这些讨论占据主导地位的关于"诈叫"的讨论。19.14—19.16 的不对称变形(C)是 1949 年为了这一著作的出版而讨论的。

第 154 页脚注①中提到的波莱尔和维勒的著作中，关于扑克的讨论也占有相当篇幅。(Vol. IV, 2: "applications aux Jeux de Hasard," Chap. V: "Le jeu de Poker.")它们十分有启发意义，但主要是以多少有点试探性的方式把概率运用于扑克的评价，没有系统运用潜在的一般博弈理论。

波莱尔的著作的第 91—97 页分析了扑克的一个肯定是策略性的阶段("诈叫")。这也可以被看作是扑克的一个简单变形——可以与我们在 19.4—19.10 和 19.14—19.16 中考虑的两个变形比较。实际上，它与后者有密切联系。

希望比较这两个变形的读者将会发现，下面的说明是有帮助的：

(I)我们的叫牌 a, b 对应着上述著作中的 $1+\alpha$。

(II)我们在 19.4—19.10 中考虑的变形与上述著作中考虑的情况之间的差别是：如果玩家 1 从一个"低水平"的叫牌开始，那么，我们的变形提供了整手牌的比较，而上述著作中的变形使他无条件地失去了"低水平"叫牌的数额。也就是说，我们把这一起始"低水平"叫牌当作是"眼前的事情"(见19.14 的开头，特别是第 211 页脚注①)，而上述著作中将其当作是"过去了的事情"。我们相信，我们的做法是对实际中的扑克的这一阶段的更好描述。尤其是，我们需要对"诈叫"进行恰当的分析和解释。详细内容见第 219 页脚注①。——186，②

③ 见 19.11 和 19.16 末尾。——187，①

我们有可能把基本的一般结论和解释建立在这样一些结果之上，这些结果是我们运用前面建立起来的理论得到的结果。

本来，扑克可以由任意多个人玩，①由于我们正在分析的是二人零和博弈，我们设定玩家人数为 2。

扑克游戏开始时，从一副牌②中给每位玩家发 5 张牌，共有 2598960 种组合。③ 5 张牌的一个组合称"一手牌"，按一定方式排序，即有规则规定"一手牌"的"大小"，从"大"到"小"，"最大"，第二，第三，等等。④ 扑克有多种玩法，它们分两类："Stud"和"Draw"。在"Stud"中，玩家的 5 张牌在开始的时候全部给出，在以后的进程中不能改变。在"Draw"中，一位玩家能够以多种方式更换他手中的牌的一部分或全部。在有些变形玩法中，玩家可以在玩的过程中分阶段依次得到他的牌。由于我们要讨论的是最简单的情况，我们将只研究 Stud。

在这种情况下，没有必要讨论牌张的组合。用 S 记一手牌中所有可能的组合的个数——从一整副牌中抽出

---

① 从某种意义上说，最大人数是 4 或 5。——187，②

② 有时是整副牌，共 52 张。当参与人人数较小时，常常用其中的一部分，如 32 张或 28 张。有时，增加一两种特殊牌张，即"大王"、"小王"。——187，③

③ 这是就整副牌而言的。有基本组合知识的读者会注意到，这是"52 个取 5 个的不重复组合"的个数：

$$\binom{52}{5}=\frac{52\cdot51\cdot50\cdot48}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=2598960。——187，④$$

④ 这一描述涉及一些人们熟知的技术术语："同花大顺"、"同花顺"、"四张同点"或"炸弹"、"同花"等。我们没有必要在这里讨论它们。——187，⑤

5 张的组合数是 2598960，那么，我们也可以将其说成，每一位玩家从 $s=1,2,\cdots,S$ 中抽取一个数。我们的想法 188
是，$s=1$ 对应着最大的一手牌，$s=S-1$ 对应着第二大的那手牌，…，$s=1$ 对应着最小的那手牌。由于一个“公正的发牌”等于假设各手牌的概率相等，我们必须把抽取上述数字 s 解释为一个机会动作，$s=1,\cdots,S$ 的每一可能值的概率都等于 $1/S$。因此，这一博弈从两个机会动作开始：玩家 1 为自己和玩家 2 各抽取一个数①，分别记为 s_1 和 s_2。

19.1.3　一般来说，扑克游戏的下一阶段是“叫牌”。这一概念是，一个玩家给出一个一定金额的叫牌之后，他的对手可以选择“不叫”，“跟了”或“争叫”。“不叫”意味着他愿意支付他上次叫牌的数额（必然低于当前数额），不做任何争辩。在这种情况下，两位玩家手中的牌到底是什么是无所谓的。两位玩家根本不开牌。“跟了”意味着接受对手的叫牌，比手中的牌，持有大牌的玩家收到当前叫牌的数额。“跟了”是这一局的结束。“争叫”意味着对手用更高叫牌反击当前的叫牌，其中玩家的角色交换，原先的竞叫者现在可以选择“不叫”、“跟了”或“争叫”，等等。②

---

① 实际中，第二个玩家从第一个玩家抽过的牌中抽取。像对待其他复杂性一样，我们也不考虑这一复杂性。——188，①

② 情况常常因在开始的时候必须给出无条件支付而变得复杂。在有些变形中，要求玩家在游戏开始前下注；在另一些变形中，要求开叫的玩家支付额外数额；有时，要求所有玩家支付额外数额。我们不予考虑。——188，②

19.2 诈叫

19.2.1 所有这些的关键是，有一手大牌的玩家希望叫得高一些，且进行多次争叫，因为他有很好的理由指望自己会赢。因此，叫得高或争叫得高的玩家的对手会假设他有一手大牌。这会使对手“不叫”。然而，由于在“不叫”的情况下，牌是不亮开的，甚至一个有一手小牌的玩家，通过高水平叫牌或争叫给对手造成自己有一手大牌的（错误）印象，从而迫使对手不叫，也会战胜有一手大牌的玩家。

这一做法正是人们熟知的“诈叫”。毫无疑问，有经验的牌手都这么做过。值得怀疑的是，这是否是其真实动机。实际中，第二种解释是值得考虑的。如果人们知道一个玩家只在有一手大牌的情况下才叫得很高，在这种情况下，他的对手大概会不叫。这样，当这位玩家的牌真的很
189 大时，他也不能在若干轮争叫中把赌注加大。因此，他要在其对手的心目中制造不确定性，即使其对手知道他偶尔会在有一手弱牌的情况下叫得很高。

总之：关于两位玩家诈叫的动机，一是想在一手弱牌的情况下给对手造成自己有一手大牌的错误印象；二是在真有一手大牌的情况下给对手造成自己有一手弱牌的错误印象。两者都是反向信号传递即误导对手的例子（见6.4.3）。然而，应该看到，第一类诈叫在对手放弃时最成功，因为这保证了想要取得的收益；第二类诈叫在对手选择“跟了”即失败的时候是最成功的，因为他达到了向对

手传递错误信息的目的。①

19.2.2　这类动机不直接的——明显不理性的——叫牌还有着另一种结果。此类叫牌必然是危险的，可以想像，值得用恰当的反诈叫措施使其风险变大，以限制对手使用它们。但是，反诈叫措施的动机事实上也是间接的。

我们花费这么长的篇幅说明这些试探性分析，原因在于我们的理论要解开所有这些可能的混合策略。我们将会在 19.10、19.15.3 和 19.16.2 中看到，围绕诈叫的这些现象如何能够得到定量分析，像占据开叫地位等那样，这些动机如何与这种游戏的主要策略特点联系着。

19.3　扑克游戏描述（续）

19.3.1　现在，让我们回到扑克的技术规则。为了避免无休止的争叫，叫牌的次数通常是受限制的。② 为了避免不切实际的冒叫——给对手造成难以想像的不合理后果，每次叫牌或争叫的数额有上限。通常，过低的争叫也是禁止的。我们将在后面说明这样做的理由（见19.13）。

---

① 这里，请再次原谅我们忽略了我们前面指出的指导原则；上述讨论显然假设了一个博弈序列（使得对手习惯的统计观察是可能的），而且它也肯定有着"动态分析"的特征。

我们请读者参阅 17.3，那里，这一明显的冲突得到了认真的研究。那里的分析完全适用于当前这一情况，应该能够证明我们的方法的合理性。这里，我们只须补充的一点是，我们的不一致——多次博弈和动态分析术语的使用——只是一个试探性的分析。以这种方式，我们能够使我们的讨论较为简洁和接近日常谈论这些事情的语言。但是，在 17.3 中，我们精心说明了如何用寻找一个良策这一严格静态问题来取代这些有疑问的东西。——189，①

② 这是 7.2.3 的停止规则。——189，②

我们将用如下最简单的形式把叫牌和争叫的这些限制明确表达出来：我们将假设这两个数字是 a, b

$$a > b > 0$$

190 是事先给定的，而且在一次叫牌中，只有两种可能："高"或"低"，前者是 a，后者是 b。我们能够通过改变 a/b 这一惟一重要的比率增加或降低这一博弈的风险，当 a/b 远大于 1 时，该博弈风险变大；当 a/b 大于 1 不太多时，该博弈相对安全。

对叫牌和争叫次数的限制将被用于简化整个博弈。实际中，玩家之一从最初的叫牌开始，然后玩家交换。

玩家之一占据开叫地位的利弊——和首先采取行动的必要性——本身就是一个有意思的问题。我们将在 19.14 和 19.15 中讨论一种非对称型的扑克游戏，其中首先采取行动是有意义的。但我们现在不希望为这一问题所困。换句话说，为了获得最纯和最简单的扑克游戏的其他基本特征，我们暂时避免偏离对称性。因此，我们将假设两位玩家都做出开叫，互不知道对手的选择。当两者都做出的开叫之后，相互告知对方自己的叫牌，即他的叫牌是"高"还是"低"。

19.3.2 我们要对这一游戏做进一步简化，只允许每位玩家选择"不叫"或"跟了"，即排除"争叫"。事实上，"争叫"只不过是已经包含在一个较高的开叫中的倾向的更详细和更强烈的表达。由于我们想进行尽可能简化，我们将避免以多种方式表达同一倾向[见 19.11、19.14 和 19.15 中的(C)]。

相应地，我们把这些条件描述为：考虑两位玩家相互告知自己的叫牌的那一刻。如果两人都叫"高"或"低"，那么，两者亮牌，有较大的牌的玩家将从对手那里收到数

量 a 或 b。如果他们手里的牌一样大，那么，不发生支付。如果一个人叫的是"高"，另一个人叫的是"低"，那么，叫"低"的玩家可以选择"不叫"或"跟了"。"不叫"意味着他向对手支付这一"低"数额（不考虑看对手的牌）。"跟了"意味着他从叫"低"改而叫"高"，这种情况就好像两人一开始就叫的都是"高"。

19.4　规则的严格描述

19.4　现在，我们严格陈述达成的规则，以总结上面最简单扑克游戏的描述：

首先，两位玩家通过一个机会动作获得手中的牌，即一个数 $s=1,\cdots,S$，这些数中的每一个有着相同的概率 $1/S$。我们把两位玩家手中的牌分别记为 s_1、s_2。

此后，每位玩家将通过一个个人动作来选择 a 或 b，即"高"或"低"叫牌。每位玩家在知道自己手里的牌而不 191
知道对手手里的牌或选择（叫牌）的情况下做出选择（叫牌）。最后，每一位玩家将自己的选择（叫牌）告知对方。（每个人都仍然知道自己手里的牌和选择。）如果出现一"高"一"低"，那么，由后者选择"不叫"或"跟了"。

这就是这个游戏的玩法。当一局结束时，按如下方式支付：如果两位玩家都叫的是"高"或"低"，或一"高"一"低"且叫的是"低"的玩家随后选择了"跟了"，那么，视 $s_1>$，或 $<s_2$，玩家 1 从玩家 2 分别得到数额 a、0 或 $-a$。如果两位玩家都叫的是"低"，那么，视 $s_1>$，$=$ 或 $<s_2$，玩家 1 从玩家 2 分别得到数额 b、0 或 $-b$。如果一位玩家叫的是"高"，另一位玩家叫的是"低"且随后选择"不叫"，那么，叫

"高"(或"低")的玩家 1 从玩家 2 那里得到数额 b(或 $-b$)。[1]

19.5 策略描述

19.5.1 在这一博弈中,一个(纯)策略显然由下述指示组成:对于每一手牌 $s=1,\cdots,S$,指出将做出的叫牌是"高"还是"低",在后一种情况下,如果叫"低"遇到对手叫的是"高",要进一步指出这位玩家选择"跟了"还是"不叫"。一个简单的描述是一个数字指数 $i_s=1,2,3$;$i_s=1$ 意味着一个"高"叫牌;$i_s=2$ 意味着一个"低"叫牌并随后选择了"跟了";$i_s=3$ 意味着一个"低"叫牌并随后选择"不叫"。因此,一个策略就是对于每一个 $s=1,\cdots,S$,指定这样一个指数 i_s,即指定一个序列 $i_1,\cdots,i_S$。

上面的描述适合两位玩家。相应地,我们将上述策略记为 $\sum_1(i_1,\cdots,i_S)$ 或 $\sum_2(j_1,\cdots,j_S)$ 。

因此,每位玩家具有相同个数的策略:等于序列 $i_1,\cdots,i_S$ 的个数,即 3^S。用 11.2.2 的符号

$$\beta_1=\beta_2=\beta=3^S。$$

---

[1] 为了保持形式上的正确,这仍应按第 2 章第 6 节和第 7 节的模式排列。因此,首先提到的两个机会动作(发牌)应被称为动作 1 和 2;随后的两个个人动作(叫牌)被称为动作 3 和 4;最后的个人动作("不叫"或"跟了")被称为动作 5。

在动作 5 的情况下,如 7.1.2 和 9.1.5 描述的那样,由谁做出这个个人动作以及备择的个数取决于博弈的进程。(如果两位玩家都叫"高"或都叫"低",那么,备择的个数是 1,我们将这个空的个人动作归于谁无关紧要。如果一个叫"高",另一个叫"低",那么,这一个人动作是叫"低"的那位玩家的。)

上述符号的一致使用还要求写出 s_1,s_2 的 σ_1,σ_2;"高"或"低"的 σ_3,σ_4;"不叫"或"跟了"的 σ_5。

我们请读者指出所有这些差别。——191,①

假如我们想严格遵从上述符号，我们应该就 $\tau_1 = 1, \cdots, \beta$ 枚 192
举序列 $i_1, \cdots, i_S$，并分别用 $\sum_1^{\tau_1}$ 和 $\sum_2^{\tau_2}$ 记玩家 1 和玩家 2 的(纯)策略。不过，我们宁愿继续使用我们当前的符号。

接下来，我们必须描述的是，在两位玩家分别使用了策略 $\sum_1(i_1, \cdots, i_S)$ 和 $\sum_2(j_1, \cdots, j_S)$ 的情况下，玩家 1 收到的支付。这是矩阵元素 $H(i_1, \cdots, i_S | j_1, \cdots, j_S)$。①

如果两位玩家实际拿到的牌分别是 s_1 和 s_2，那么，根据上述规则，玩家 1 收到的支付能够表达为：$L_{sgn(s_1 - s_2)}$，其中 $sgn(s_1 - s_2)$ 是 $s_1 - s_2$ 的正负号②，三个函数

$$L_+(i,j),\quad L_0(i,j),\quad L_-(i,j)\qquad i,j = 1,2,3$$

能够表达为下述矩阵：③

$i \backslash j$	1	2	3
1	a	a	b
2	a	b	b
3	$-b$	b	b

$L_+(i,j)$

图 36

$i \backslash j$	1	2	3
1	0	0	b
2	0	0	0
3	$-b$	0	0

$L_0(i,j)$

图 37

$i \backslash j$	1	2	3
1	$-a$	$-a$	b
2	$-a$	$-b$	$-b$
3	$-b$	$-b$	$-b$

$L_-(i,j)$

图 38

① 序列 $i_1, \cdots, i_S$ 是行指数，$j_1, \cdots, j_S$ 是列指数。在我们当初的符号中，策略是 $\sum_1^{\tau_1}$ 和 $\sum_2^{\tau_2}$，矩阵元素是 $H(\tau_1, \tau_2)$。——192，①

② 分别对应着 $s_1 >$、$=$ 或 $< s_2$ 的 +、0 或 -。它以算术形式表达了哪一手牌更大。——192，②

③ 请读者认真比较这些矩阵和我们对规则的文字描述，并验证它们的正确与否。另一种值得注意的情况是，该博弈的对称性对应着如下恒等式：

$$L_+(i,j) \equiv -L_-(j,i),\quad L_0(i,j) \equiv -L_0(j,i)。$$——192，③

如前面描述的那样，s_1, s_2 源于机会动作。因此，

$$H(i_1, \cdots, i_S | j_1, \cdots, j_S) = \frac{1}{S^2} \sum_{s_1, s_2 = 1}^{S} L_{\mathrm{sgn}(s_1 - s_2)}(i_{s_1}, j_{s_2})。$$①

19.5.2 接下来，我们过渡到17.2意义上的（混合）

193 策略。它们是属于 S_β 的 $\vec{\xi}, \vec{\eta}$。考虑到我们现在正使用的符号，我们必须以新的方式指出这些向量的分量：我们写 $\xi_{i_1, \cdots, i_S}, \eta_{j_1, \cdots, j_S}$ 而不写 $\xi_{\tau_1}, \eta_{\tau_2}$。

像17.4.1的(17:2)那样，我们给出玩家1的收益的期望值：

$$K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \sum_{i_1, \cdots, i_S, j_1, \cdots, j_S} H(i_1, \cdots, i_S | j_1, \cdots, j_S) \xi_{i_1, \cdots, i_S} \eta_{j_1, \cdots, j_S}$$

$$= \frac{1}{S^2} \sum_{i_1, \cdots, i_S, j_1, \cdots, j_S} \sum_{s_1, s_2} L_{\mathrm{sgn}(s_1 - s_2)}(i_{s_1}, j_{s_2}) \xi_{i_1, \cdots, i_S} \eta_{j_1, \cdots, j_S}。$$

交换两个 $\sum$ 的顺序并写成如下方式是有好处的：

$$K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \frac{1}{S^2} \sum_{s_1, s_2} \sum_{i_1, \cdots, i_S, j_1, \cdots, j_S} L_{\mathrm{sgn}(s_1 - s_2)}(i_{s_1}, j_{s_2}) \xi_{i_1, \cdots, i_S} \eta_{j_1, \cdots, j_S}。$$

如果我们令

(19:1) $$\rho_i^{s_1} = \sum_{\substack{i_1, \cdots, i_S \neq i_{s_1} \\ i_{s_1} = i}} \xi_{i_1, \cdots, i_S},$$

(19:2) $$\sigma_j^{s_2} = \sum_{\substack{j_1, \cdots, j_S \neq j_{s_2} \\ j_{s_2} = j}} \eta_{j_1, \cdots, j_S},$$

---

① 作为上面脚注③的结果，请读者验证

$$H(i_1, \cdots, i_S | j_1, \cdots, j_S) = -H(j_1, \cdots, j_S | i_1, \cdots, i_S)。$$

即

$$H(i_1, \cdots, i_S | j_1, \cdots, j_S)$$

是一个斜对称矩阵，再次表达了该博弈的对称性。——192，④

那么，上述方程变成

$$(19:3)\quad K(\vec{\xi},\vec{\eta})=\frac{1}{S^2}\sum_{s_1,s_2}\sum_{i,j}L_{sgn(s_1-s_2)}(i,j)\rho_i^{s_1}\sigma_j^{s_2}。$$

这里有必要对(19:1)—(19:3)的含义进行文字说明。

(19:1)表明，$\rho_i^{s_1}$ 是玩家 1 拿到一手牌 s_1 时，借助混合策略 $\vec{\xi}$ 选择 i 的概率；(19:2)表明，$\sigma_j^{s_2}$ 是玩家 2 拿到一手牌 s_2 时，借助混合策略 $\vec{\eta}$ 选择 j 的概率。① 直觉上清楚的一点是，期望值 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 仅仅依赖于概率 $\rho_i^{s_1}$，$\sigma_j^{s_2}$，而不依赖于潜在概率 $\xi_{i_1},\cdots,\xi_{i_s}$ 和 $\eta_{j_1},\cdots,\eta_{j_s}$ 本身。② 以这一直接方式，不难看出，公式(19:3)是正确的：我们只需回忆 194
$L_{sgn(s_1-s_2)}(i_{s_1},j_{s_2})$ 的含义和 $\rho_i^{s_1}$，$\sigma_j^{s_2}$ 的解释。

---

① 我们从 19.4 得知，i 或 $j=1$ 意味着一个“高”叫牌，$i=2,3$ 意味着一个“低”叫牌，并有着随后选择“跟了”或“不叫”的倾向。——193，①

② 这意味着，两个不同的(纯)策略组合有可能有相同的实际影响。

aabb 我们可以用一个简单的例子说明这一点。令 $S=2$，即假设只存在一手“大牌”和一手“小牌”。把 $i=2,3$ 看作一回事，即假设只存在一个“高”叫牌和“低”叫牌。那么，存在着四种可能的(纯)策略，我们分别称为：

“鲁莽”：总是叫“高”。

“谨慎”：总是叫“低”。

“正常”：大牌时叫“高”，小牌时叫“低”。

“诈叫”：小牌时叫“高”，大牌时叫“低”。

那么，“鲁莽”和“谨慎”的 50—50 混合策略与“正常”和“诈叫”的 50—50 混合策略有相同效果：两者都意味着，这一玩家将在任何情况下都以 50—50 随机地叫“高”或“低”。

然而，在我们现在的符号中，这是两个不同的混合策略，即两个不同的 $\vec{\xi}$。

这当然意味着，我们的完全适合一般博弈的符号对于很多具体博弈来说是多余的。在有一般目的的数学讨论中，这是常有的事情。

当我们给出一般理论时，就没有理由认为这是多余的了。但是，对于我们正在讨论的这个具体博弈来说，我们将把它去掉。——193，②

19.5.3 非常清楚，根据 $\rho_i^{\iota_1}$，$\sigma_j^{\iota_2}$ 含义和(19:1)、(19:2)对它们的正式定义，它们满足如下条件：

(19:4) $$\rho_i^{\iota_1} \geqq 0, \quad \sum_{i=1}^{3} \rho_i^{\iota_1} = 1,$$

(19:5) $$\sigma_j^{\iota_2} \geqq 0, \quad \sum_{j=1}^{3} \sigma_j^{\iota_2} = 1。$$

另一方面，满足这些条件的任何 $\rho_i^{\iota_1}$，$\sigma_j^{\iota_2}$ 都能够借助(19:1)和(19:2)从 $\vec{\xi}$，$\vec{\eta}$ 得到。这在数学上是清楚的①，也是符合直觉的。$\rho_i^{\iota_1}$，$\sigma_j^{\iota_2}$ 的任何这类系统都是一个概率系统，它定义一个可能的计算方法(modus procedendi)，所以它们必定对应着某一混合策略。

(19:4)和(19:5)刚好给出了两个三维向量：

$$\vec{\rho}^{\iota_1} = \{\rho_1^{\iota_1}, \rho_2^{\iota_1}, \rho_3^{\iota_1}\} \qquad \vec{\sigma}^{\iota_2} = \{\sigma_1^{\iota_2}, \sigma_2^{\iota_2}, \sigma_3^{\iota_2}\}$$

那么，(19:4)和(19:5)恰恰说明，所有 $\vec{\rho}^{\iota_1}$，$\vec{\sigma}^{\iota_2}$ 都属于 S_3。

这说明，这些向量的引入带来了多么大的简化：$\vec{\xi}$(或 $\vec{\eta}$)是 S_β 中的一个向量，即依赖于 $\beta - 1 = 3^S - 1$ 个常数；$\vec{\rho}^{\iota_1}$(或 $\vec{\sigma}^{\iota_2}$)是 S_3 中 S 个向量，即每一个依赖于两个常数；因此，它们合起来是 $2S$ 个常数。而且，甚至对于一个不太大的 S，$3^S - 1$ 也远远大于 $2S$。②

19.6 问题陈述

195 **19.6** 由于要对付的是一个对称博弈，我们能够使用

---

① 例如，令 $\xi_{i_1,\cdots,i_S} = \rho_{i_1}^1 \cdot \cdots \cdot \rho_{i_S}^S$，$\eta_{i_1,\cdots,i_S} = \rho_{j_1}^1 \cdot \cdots \cdot \sigma_{j_S}^S$，并验证17.2.1的(17:2:a)、(17:1:b)是上述(19:4)和(19:5)的结果。——194，①

② 实际上，S 大约等于250万(见第187页脚注④)；因此 $3^S - 1$ 和 $2S$ 都很大，但前者远远大于后者。——194，②

17.11.2 的（17:H）中关于良策（混合策略）的特征描述，即 $\overrightarrow{A}$ 中的 $\vec{\xi}$。这一结果是说：$\vec{\xi}$ 必须是针对它本身的最优策略，即 $\mathrm{Min}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 必定在 $\vec{\xi}=\vec{\eta}$ 时实现。

19.5 告诉我们，$K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 实际依赖于 $\vec{\rho}^{s_1}_i$，$\vec{\sigma}^{s_2}_j$。这样，我们可以将其写成 $K(\vec{\rho}^1,\cdots,\vec{\rho}^s \mid \vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\sigma}^s)$。那么，19.5.2 中的（19:3）告诉我们（我们重新安排求和 $\sum$ 的顺序）

（19:6）
$$K(\vec{\rho}^1,\cdots,\vec{\rho}^s \mid \vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\sigma}^s) = \frac{1}{S^2}\sum_{S_1,i}\sum_{S_2,j} L_{sgn(s_1-s_2)}(i,j)\rho^{s_1}_i,\sigma^{s_2}_j。$$

而且 $\vec{\rho}^1,\cdots,\vec{\rho}^s$ 作为一个良策的特征是：

$$\mathrm{Min}_{\vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\sigma}^s} K(\vec{\rho}^1,\cdots,\vec{\rho}^s \mid \vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\sigma}^s)$$

在 $\vec{\rho}^1=\vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\rho}^s=\vec{\sigma}^s$ 时实现。这一条件基本上能够以 17.9.1 中对付类似问题的方法得到。我们换一种方式对其进行简要说明。

（19.6）中的 $\mathrm{Min}_{\vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\sigma}^s}$ 等于分别就 $\vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\sigma}^s$ 求最小值，因此，考虑这样一个 $\vec{\sigma}^{s_2}$，它受到的约束条件只是要求它属于 S_3，即

$$\sigma^{s_2}_j \geqq 0,\quad \sum_{\sigma^{s_2}_j=1}^{3} = 1。$$

（19:6）是三个分量 $\sigma^{s_2}_1,\sigma^{s_2}_2,\sigma^{s_2}_3$ 的一个线性表达式。因此，在它取得其最小值的地方，$\vec{\sigma}^{s_2}$ 的所有分量 $\sigma^{s_2}_j$ 中不具有最小可能系数者均等于零。

$\sigma^{s_2}_j$ 的系数是

$$\frac{1}{S^2}\sum_{S_1,i} L_{符号(s_1-s_2)}(i,j)\rho^{s_1}_i,$$

记为$\frac{1}{S}\gamma_j^{s_2}$。

所以,(19:6)变成

$$(19:7)\qquad K(\vec{\rho}^1,\cdots,\vec{\rho}^S\mid\vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\sigma}^S)=\frac{1}{S}\sum_{s_2,j}\gamma_j^{s_2}\sigma_j^{s_2}。$$

196 而且,它就$\vec{\sigma}^{s_2}$取最小值的条件是

(19:8) 对每一数对 s_2,j,如果 $\gamma_j^{s_2}$ 没有(在 j 中[①])取得其最小值,那么,我们有 $\sigma_j^{s_2}=0$。

因此,在 $\vec{\sigma}^1=\vec{\rho}^1,\cdots,\vec{\sigma}^S=\vec{\rho}^S$ 取最小值的一个良策的特征是:

(19:A) $\vec{\rho}^1,\cdots,\vec{\rho}^S$ 描述了一个良策,即 $\vec{\xi}$ 属于 $\overline{A}$,当且仅当:

对于每一个数对 s_2,j,如果 $\gamma_j^{s_2}$ 没有(在 j 中[②])取得其最小值,那么,我们有 $\rho_j^{s_2}$。

最后,我们当然要借助图 36—38 的矩阵图明确给出 $\gamma_j^{s_2}$ 的表达式。它们是

$$(19:9:a)\qquad \gamma_1^{s_2}=\frac{1}{S}\Big\{\sum_{s_1=1}^{s_2-1}(-a\rho_1^{s_1}-a\rho_2^{s_1}-b\rho_3^{s_1})-b\rho_3^{s_2}+\sum_{s_1=s_2+1}^{S}(a\rho_1^{s_1}+a\rho_2^{s_1}-b\rho_3^{s_1})\Big\},$$

$$(19:9:b)\qquad \gamma_2^{s_2}=\frac{1}{S}\Big\{\sum_{s_1=1}^{s_2-1}(-a\rho_1^{s_1}-b\rho_2^{s_1}-b\rho_3^{s_1})+\sum_{s_1=s_2+1}^{S}(a\rho_1^{s_1}+b\rho_2^{s_1}+b\rho_3^{s_1})\Big\},$$

---

① 意思是在 j 中,而不是在 s_2,j 中!——196,①

② 同上。

$$(19:9:c)\qquad \gamma_3^{s_2}=\frac{1}{S}\Big\{\sum_{s_1=1}^{s_2-1}(b\rho_1^{s_1}-b\rho_2^{s_1}-b\rho_3^{s_1})+b\rho_1^{s_2}+\sum_{s_1=s_2+1}^{S}(b\rho_1^{s_1}+b\rho_2^{s_1}+b\rho_3^{s_1})\Big\}。$$

19.7 从离散情况过渡到连续情况

19.7.1 19.6 的(19:A)与公式(19:7)、(19:9:a)、(19:9:b)和(19:9:c)结合起来能够用于决定所有良策。[①] 这方面的分析有着令人厌烦的组合特征，涉及若干不同情况的分析。我们得到的结果是定量分析结果，类似于下面在修正的假设条件下得到的结果，差别只是细节性的，这些细节性的东西也被称为策略的"精细结构"(fine structure)。我们将在 19.12 中给予更多说明。 197

此刻，我们的主要兴趣是解的主要特征，而不是"精细结构"问题。首先，让我们注意可能的牌 $s=1,\cdots,S$ 构成的序列的"颗粒状"结构。

如果我们想把各手牌的大小按照一个 0%—100% 的刻度来描述，或用一个 0—1 的分数来描述，那么，最小的一手牌 $s=1$ 将对应着 0，最大的一手牌 S 将对应着 1。因此，"一手牌"$s(s=1,\cdots,S)$ 应该位于这一刻度的 $z=\frac{s-1}{S-1}$ 处，即我们有如下对应关系：

① 这一决定是由我们两人之一做出的，且即将在别的地方出版。——196，②

可能的牌	旧刻度	$s=$	1	2	3	……	$S-1$	S
	新刻度	$z=$	0	$\frac{1}{S-1}$	$\frac{2}{S-1}$	……	$\frac{S-2}{S-1}$	1

图 39

因此，z 的值十分稠密地填入区间①

(19:10)　　　　$0 \leqq z \leqq 1$。

但不管怎样，它毕竟是一个离散的序列。这正是上面提到的"颗粒状"结构。下面，我们将用一个连续的区间取代它。

也就是说，我们假设，选择手中牌 s 即 z 的机会动作能够产生区间(19:10)中的任何 z。我们假设，(19:10)的任何一个部分的概率是这一部分的长度，即 z 是均匀分布于(19:10)的。② 我们记玩家 1 和玩家 2 拿到的牌分别为 z_1, z_2。

19.7.2　这一变化要求我们用向量 $\vec{\rho}^{z_1}, \vec{\sigma}^{z_2}$ $(0 \leqq z_1, z_2 \leqq 1)$ 取代 $\vec{\rho}^{s_1}, \vec{\sigma}^{s_2}$ $(s_1, s_2 = 1, \cdots, S)$；它们仍然是概率向量，即仍属于 S_3。所以，分量(概率) $\rho_i^{s_1}, \sigma_j^{s_2}$ $(s_1, s_2 = 1, \cdots, S; i, j = 1, 2, 3)$ 让位于分量 $\rho_i^{z_1}, \sigma_j^{z_2}$ $(0 \leqq z_1, z_2 \leqq 1; i, j = 1, 2, 3)$。类似，19.6 中的 $\gamma_j^{s_2}$ 变成 $\gamma_j^{z_2}$。

下面，我们要写出(19:7)中的 K 和(19:9:a)，(19:9:b)，(19:9:c)中 γ_j' 的表达式。显然，求和

198

$$\frac{1}{S}\sum_{s_1=1}^{S}, \quad \frac{1}{S}\sum_{s_2=1}^{S}$$

---

① 你会回想起(第 187 页脚注④)，S 大约是 250 万。——197，①

② 这是所谓几何概率。——197，②

必须被换成积分

$$\int_0^1 \cdots dz_1, \qquad \int_0^1 \cdots dz_2,$$

求和

$$\frac{1}{S}\sum_{s_1=1}^{s_2-1}, \quad \frac{1}{S}\sum_{s_1=s_2+1}^{S}$$

换成积分

$$\int_0^{z_2} \cdots dz_1, \qquad \int_{z_2}^{0} \cdots dz_1,$$

因子 $1/S$ 后面的孤立项可以被忽略。①② 理解这些之后，K 和公式 $\gamma_j^{\prime}$（即 γ_j^{z}）的公式变成了：

(19:7*)
$$K = \sum_j \int_0^1 \gamma_j^{z_2} \sigma_j^{z_2} dz_2,$$

(19:9:a*)
$$\gamma_1^{z_2} = \int_0^{z_2} (-a\rho_1^{z_1} - a\rho_2^{z_1} - b\rho_3^{z_1})dz_1 + \int_{z_2}^1 (a\rho_1^{z_1} + a\rho_2^{z_1} - b\rho_3^{z_1})dz_1,$$

(19:9:b*)
$$\gamma_2^{z_2} = \int_0^{z_2} (-a\rho_1^{z_1} - b\rho_2^{z_1} - b\rho_3^{z_1})dz_1 + \int_{z_2}^1 (a\rho_1^{z_1} + b\rho_2^{z_1} + b\rho_3^{z_1})dz_1,$$

(19:9:c*)
$$\gamma_3^{z_2} = \int_0^{z_2} (b\rho_1^{z_1} - b\rho_2^{z_1} - b\rho_3^{z_1})dz_1$$

---

① 具体而言，我们指 (19:9:a) 和 (19:9:c) 中的中间项 $-b\rho_3^{z_2}$ 和 $b\rho_1^{z_2}$。——198，①

② 对应着 $s_1 = s_2$ 的项，在我们现在的符号中，相应是 $z_1 = z_2$，而且，由于 z_1, z_2 是连续变量，它们的概率等于零。

数学上，你可以把这些运算说成是，我们正在进行一个令 $S\to\infty$ 取极限的过程。——198，②

$$+\int_{z_1}^{1}(b\rho_1^{z_1}+b\rho_2^{z_1}+b\rho_3^{z_1})\,dz_1。$$

而且 19.6 的(19:A)的特征变成了

(19:B) $\vec{\rho}^{z}$ $(0\leqq z\leqq 1)$(它们都属于 S_3)描述一个良策,当且仅当:

对于每一个数对 z,j,如果 γ_j^z 没有(在 j 中[①])取得其最小值,那么,我们有 $\rho_j^z=0$。[②]

19.8 解的数学决定

199 **19.8.1** 下面,我们继续研究良策 $\vec{\rho}^{z}$,即 19.7 的隐含条件(19:B)的解。

首先假设,$\rho_2^z>0$ 总成立。[③] 对于这样一个 z,必然有 $\mathrm{Min}_j\gamma_j^z=\gamma_2^z$,从而,$\gamma_1^z\geqq\gamma_2^z$,即

$$\gamma_2^z-\gamma_1^z\leqq 0。$$

把(19:9:a*)、(19:9:b*)代入上式得

---

① 意思是在 j 中,而不是在 z 和 j 中! ——198,③

② 公式(19:7*)、(19:9:a*)、(19:9:6*)、(19:9:c*)和这个准则本可以通过讨论这一"连续的"安排来直接得到,从一开始就用 $\vec{\rho}^{z_1}$,$\vec{\rho}^{z_1}$ 替换 $\vec{\xi}$,$\vec{\eta}$,使我们的证明显得严格、完备,我们在 19.4—19.7 中选择了较长和较为易懂的过程。读者将会发现,完成上面提到的简短而直接的讨论是一个很好的练习。

我们希望建立这样一类博弈的理论,其中这类连续参数系统直接进入我们的理论,即目前这一做法的充分推广,而不仅仅限于一个具体博弈。

在这方面,维勒向前迈出了有意义的一步,见第 154 脚注 ① 提到的著作第 110—113 页。那里做出的连续性假设对于很多应用来说过于严格,尤其我们当前面临的情况。——198,④

③ $j=2$ 时的受到考虑的良策,即特定条件下有"跟了"倾向的"低"叫牌。——199,①

(19:11)　$(a-b)\left(\int_0^z \rho_2^{z_1} dz_1 - \int_z^1 \rho_2^{z_1} dz_1\right) + 2b\int_z^1 \rho_3^{z_1} dz_1 \leqq 0$。令 z^0 是使 $\rho_2^z > 0$ 的那些 z 的上限。① 根据连续性,(19:11)对于 $z=z^0$ 也是成立的。由于按定义,$z_1 > z^0$ 时,不可能有 $\rho_2^{z_1} > 0$,所以(19:11)中 $\int_{z^0}^1 \rho_2^{z_1} dz_1 = 0$。这样,我们将符号由 - 改为 +,从而(19:11)变成

$$(a-b)\int_0^1 \rho_2^{z_1} dz_1 + 2b\int_{z^0}^1 \rho_3^{z_1} dz_1 \leqq 0。$$

但是,根据假设,$\rho_2^{z_1}$ 总是≧0,且有时 >0。从而,上述不等式中的第一项 >0。②③ 第二项显然≧0。这样,我们得到了一个矛盾。也就是说,我们证明了

(19:12)　$$\rho_2^z \equiv 0。$$④

19.8.2 消除了 $j=2$ 之后,让我们分析 $j=1$ 与 $j=3$ 之间的关系。由于 $\rho_2^z=0$,所以 $\rho_1^z+\rho_3^z \equiv 1$,即

(19:13)　$$\rho_3^z = 1-\rho_1^z,$$

且

---

① 满足 $\rho_2^z>0$ 的最大 z^0 任意地发生在 z^0 邻近。(但我们并不要求对于所有 $z<z^0$,$\rho_2^z>0$。)如果满足 $\rho_2^z>0$ 的 z 存在,z^0 的存在性是肯定的。——199,②

② 当然,$a-b>0$。——199,③

③ 似乎没有必要如此深入积分或其他度量的细节。我们假设我们的函数是光滑的,足以使一个正的函数有一个正的积分。如果我们使用上面提到的有关数学理论,我们能够更容易地给出严格的处理。——199,④

④ 读者应该逐字重述这一结果:通过分析一手牌的假设中的可能上限,我们排除了有"跟了"意向的"低"叫牌。而且,我们证明了,至少在那附近,一个直接的"高"叫牌是人们更倾向于的。

当然,在我们的模型中,这是不允许的,因为我们的简化禁止了"盖叫"。——199,⑤

(19:14) $$0 \leqq \rho_1^z \leqq 1。$$

现在，区间 $0\leqq\rho_1^z\leqq1$ 可能有这样一个子区间，在这个子区间内，$\rho_1^z=0$ 或 $\rho_1^z=1$ 总成立。① 一个 z 不属于这两类区间
200 中的任何一个，即任意地接近于 $\rho_1^{z'}\neq0$ 和 $\rho_1^{z'}\neq1$ 的地方，称 z 为**中间情况**。由于 $\rho_1^{z'}\neq0$ 或 $\rho_1^{z'}\neq1$（即 $\rho_3^{z'}\neq0$）意味着 $\mathrm{Min}_j\gamma_j^{z'}=\gamma_1^{z'}$ 或 $\gamma_3^{z'}$，所以我们看到：$\gamma_1^{z'}\leqq\gamma_3^{z'}$ 或 $\gamma_1^{z'}\geqq\gamma_3^{z'}$ 发生在中间情况 z 的任意邻近。因此，对于一个 z，根据连续性②，$\gamma_1^z=\gamma_3^z$，即

$$\gamma_3^z-\gamma_1^z=0。$$

代入(19:9:a*)、(19:9:c*)并回忆(19:12)和(19:13)给出

$$(a+b)\int_0^z\rho_1^{z_1}dz_1-(a-b)\int_z^1\rho_1^{z_1}dz_1+2b\int_z^1(1-\rho_1^{z_1})dz_1=0$$

即

(19:15) $$(a+b)\left(\int_0^z\rho_1^{z_1}dz_1-\int_z^1\rho_1^{z_1}dz_1\right)+2b(1-z)=0。$$

接下来，考虑两个中间情况 z 和 z''。将(19:15)运用于 $z=z'$ 和 $z=z''$ 并相减，那么，

$$2(a+b)\int_{z'}^{z''}\rho_1^{z_1}\mathrm{d}z_1-2b(z''-z')=0,$$

即

(19:16) $$\frac{1}{z''-z'}\int_{z'}^{z''}\rho_1^{z_1}dz_1=\frac{b}{a+b}。$$

文字表达为：在两个中间情况 z'、z'' 之间，ρ_1^z 的平均是 $\frac{b}{a+b}$。

---

① 即策略指导玩家总是叫"高"或它指导玩家总是叫"低"（并随后"不叫"）。——199，⑥

② γ_j^z 是用积分(19:9:a*)、(19:9:b*)和(19:9:c*)定义的，因此它们肯定是连续的。——200，①

所以，$\rho_1^z \equiv 0$ 和 $\rho_1^z \equiv 1$ 都不可能在整个区间

$$z' \leqq z \leqq z''$$

上成立，因为这样会产生平均值 0 或 1。所以，这个区间必定包括另一个中间情况 z，即在任意两个中间情况之间至少存在着第三个中间情况。这一结果表明，任何两个中间情况 $\overline{z'}$、$\overline{z''}$ 之间总存在另一个中间情况。因此，使 (19:16) 成立的 $\overline{z'}$、$\overline{z''}$ 任意稠密地存在于 z'、z'' 之间。但是，根据连续性，(19:16) 必定对 z'、z'' 之间的所有 $\overline{z'}$、$\overline{z''}$ 成立。[1] 在 z'、z'' 之间，除了 $\rho_1^z = \frac{b}{a+b}$，没有其他选择余地。[2]

19.8.3 如果中间情况 z 总是存在的，那么，存在一个最大的和一个最小的，将两者分别记为 $\overline{z'}$、$\overline{z''}$。我们有 201

(19:17)　$\rho_1^z = \frac{b}{a+b}$，　对于任何 $\overline{z'} \leqq z \leqq \overline{z''}$。

如果根本不存在中间情况 z，那么，（对于所有 z），我

---

① (19:16) 中的积分肯定是连续的。——200，②

② 显然，面积为零的——即总概率（例如有限个数的固定的）——离散个数 z 的例外情况是允许的。它们不改变积分值。一个严格的数学证明并不困难，不过不是这里需要的（见第 199 页脚注④）。因此，最简单的办法是假设 $\rho_1^z = \frac{b}{a+b}$ 毫无例外地属于 $\overline{z'} \leqq z \leqq \overline{z''}$。

在评价后面涉及区间 $\overline{z'} \leqq z \leqq \overline{z''}$ 的公式，以及涉及区间 $0 \leqq z < \overline{z'}$，$\overline{z''} < z' \leqq 1$ 的公式的时候，我们要将这一点牢记在心。后两个区间没有把 $\overline{z'}$，$\overline{z''}$ 计算进去。这当然是无所谓的：两个固定的孤立的点——这种情况下的 $\overline{z'}$ 和 $\overline{z''}$——总是可以舍弃的（见上）。

然而，读者必须注意的是，当 z 自身被比较时，一个 < 与一个 ≦ 之间没有显著区别，但对于 γ_j^z 来说，事情就不是这样。我们看到，$\gamma_1^z > \gamma_3^z$ 意味着 $\rho_1^z = 0$，而 $\gamma_1^z \geqq \gamma_3^z$ 却没有这一结果。（见图 41、图 47 和图 48 的讨论。）——200，③

们必定有 $\rho_1^z=0$ 或 $\rho_1^z=1$。不难看出，两者都不是解。[①] 因此，中间情况 z 的确存在且(19:17)成立。

19.8.4 对所有的 z，(19:15)的左边是 $\gamma_3^z-\gamma_1^z$，从而，对于 $z=1$，

$$\gamma_3^1-\gamma_1^1=(a+b)\int_0^1\rho_1^{z_1}\mathrm{d}z_1>0$$

（因为 $\rho_1^{z_1}=0$ 被排除了）。根据连续性，$\gamma_3^z-\gamma_1^z>0$，即 $\gamma_1^z<\gamma_3^z$ 在 z 仅仅近似等于 1 时也是成立的。因此，对于这些 z，$\rho_3^z=0$，即 $\rho_1^z=1$。故，(19:17)的必要条件是 $\overline{z''}<1$。在 $\overline{z''}\leqq z\leqq 1$ 中，不存在中间情况的 z；所以，$\rho_1^z=0$ 或 $\rho_1^z=1$ 仍旧在整个区间上成立。我们前面的结果排除了 $\rho_1^z=0$。所以，

(19:18) $\rho_1^z=1$， 对所有 $\overline{z''}\leqq z\leqq 1$。

19.8.5 最后，让我们考虑(19:17)的左端点 $\overline{z'}$。如果 $\overline{z'}>0$，那么，我们有区间 $0\leqq z\leqq\overline{z'}$。这个区间不包含中间情况 z，所以我们有 $\rho_1^z=0$ 或 $\rho_1^z=1$ 在 $0\leqq z\leqq\overline{z'}$ 上任意一点成立。(19:15)左边，即 $\gamma_3^z-\gamma_1^z$ 的一阶导数显然是 $2(a+b)\rho_1^z-2b$。因此，在 $0\leqq z<\overline{z'}$ 内，如果 $\rho_1^z=0$，这个导数是 $2(a+b)\cdot 0-2b=-2b<0$；如果 $\rho_1^z=1$，那么，这个导数是 $2(a+b)\cdot 1-2b=2a>0$，即 $\gamma_3^z-\gamma_1^z$ 在 $0\leqq z<\overline{z'}$ 上分别单调递减或递增。由于它在上端点（中间情况 $\overline{z'}$）处

① 也就是说，在所有情况下，总是叫“低”（随后“不叫”）不是一个良策；在任何情况下总是叫“高”也不是良策。

数学证明：对于 $\rho_1^z=0$：算出 $\gamma_1^0=-b$，$\gamma_3^0=b$，从而 $\gamma_1^0<\gamma_3^0$，这与 $\rho_3^0=1\neq 0$ 矛盾；对于 $\rho_1^z=1$：算出 $\gamma_1^0=a$，$\gamma_3^0=b$，从而 $\gamma_3^0<\gamma_1^0$，与 $\rho_1^0=1\neq 0$ 矛盾。——201，①

的值是 0，我们分别有 $\gamma_3^z-\gamma_1^z>0$ 或 <0，即 $\gamma_1^z<\gamma_3^z$ 或 $\gamma_3^z<\gamma_1^z$。前者要求，在 $0\leqq z<\overline{z'}$ 内，$\rho_3^z\equiv 0$，$\rho_1^z\equiv 1$，后者要求 $\rho_1^z\equiv 0$。但是，作为我们的出发点的假设分别是 $\rho_1^z\equiv 0$，或 $\rho_1^z\equiv 1$。因此，每一种情况中都存在着一个矛盾。

故

(19:19)
$$\overline{z'}=0。$$

19.8.6　下面，我们通过说明(19:15)对于中间情况的 $z=\overline{z'}=0$ 的成立性来确定 $\overline{z''}$。这时，(19:15)变成了

$$-(a+b)\int_0^1\rho_1^{z_1}\mathrm{d}z_1+2b=0,$$

$$\int_0^1\rho_1^{z_1}\mathrm{d}z_1=\frac{2b}{a+b}。$$

但是，(19:17)、(19:18)和(19:19)给出　202

$$\int_0^1\rho_1^{z_1}\mathrm{d}z_1=\overline{z''}\cdot\frac{b}{a+b}+(1-\overline{z''})\cdot 1$$

$$=1-\frac{a}{a+b}\cdot\overline{z''}。$$

所以，我们有

$$1-\frac{a}{a+b}\cdot\overline{z''}=\frac{2b}{a+b},$$

$$\frac{a}{a+b}\cdot\overline{z''}=1-\frac{2b}{a+b}=\frac{a-b}{a+b},$$

即

(19:20)
$$\overline{z''}=\frac{a-b}{a}。$$

结合(19:17)、(19:18)、(19:19)和(19:20)给出：

(19:21) $$\rho_1^z\begin{cases}=\dfrac{b}{a+b} & 0\leqq z\leqq\dfrac{a-b}{a}\\ =1 & \dfrac{a-b}{a}<z\leqq 1。\end{cases}$$

与(19:12)、(19:13)结合起来,这就完全描述了这一策略的特征。

19.9 解的详细分析

19.9.1 19.8 断言,扑克博弈中有且只有一个良策。① 它由 9.8 中的(19:21)、(19:12)和(19:13)描述。下面,我们将给出这一策略的几何图示,以使后面的口头讨论更加容易。(见图 40。这个图的实际比例是$a/b\sim3$。)

粗线描述的是 $\rho=\rho_1^z$。因此,粗线的高度就是一个"高"开叫的概率 ρ_1^z。细线 $\rho=1$ 的高度是一个"低"开叫(并随后"不叫")的概率:$\rho_3^z=1-\rho_1^z$。

19.9.2 19.7 的公式(19:9:a*)、(19:9:b*)和(19:9:c*)允许我们计算系数 γ_j^z。我们给出其图示,把基本的验证留给读者。(见图 41。实际比例是图 40 中的比例,即$a/b\sim3$。)实线代表 $\gamma=\gamma_1^z$;点线代表 $\gamma=\gamma_2^z$;虚线代表 $\gamma=\gamma_3^z$。图 41 表明,在$0\leqq z\leqq\frac{a-b}{a}$内,实线和虚线重合(即 γ_1^z 与

203 γ_3^z 一致),在$\frac{a-b}{a}<z\leqq 1$ 内,点线与虚线重合(即 γ_2^z 与 γ_3^z 一

① 事实上,我们仅仅证明了,只有在 19.8 中确定的策略才能够是良策,而且这一策略也的确是良策。这是已有的有关良策存在性的结果,虽然我们从"离散"情况到"连续"情况的过渡也许会引起一些怀疑。但是,我们将在下面证明,我们正在讨论的策略的确是良策,即满足 19.7 的(19:B)。——202、①

致）。这三条线中的每一条都由两段组成，它们相交于 $z=\frac{a-b}{a}$。图中给出了关键点 $z=0,\frac{a-b}{a},1$ 处 γ_j^i 的值。①

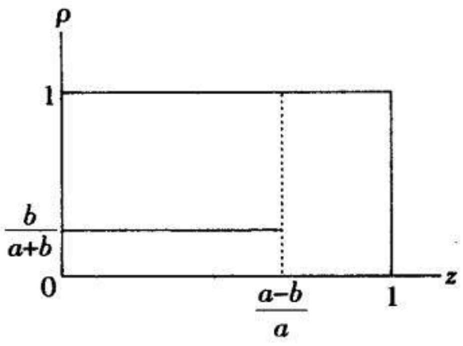


图 40

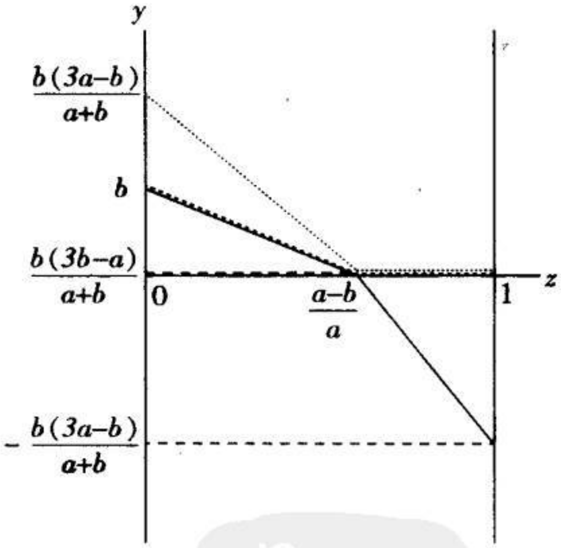


图 41

19.9.3　比较图 40 和图 41 表明，我们的策略的确是 204

① 这些结果的简单计算留给读者。——203，①

良策,即它满足 19.7 的(19:B)。事实上:在 $0 \leqq z \leqq \frac{a-b}{a}$ 内,$\rho_1^z \neq 0$ 且 $\rho_3^z \neq 0$,γ_1^z 和 γ_3^z 都是最下面的线,即等于 $\text{Min}_j \gamma_j^z$。在 $\frac{a-b}{a} < z \leqq 1$ 内,只有 $\rho_1^z \neq 0$,只有 γ_1^z 是最低的线,即等于 $\text{Min}_j \gamma_j^z$。(由于 $\rho_2^z = 0$,γ_2^z 表现如何是无所谓的事情。)

我们还能够从 19.7 中的(19:7*)计算出 K,即一局博弈的值。不难得到,$K = 0$。这是预料之中的事情,因为该博弈是对称的。

19.10 解的解释

19.10.1 下面,我们给出 19.8、19.9 结果的文字说明。

首先,在图 40 中,良策的图形表明,对于一手充分大的牌 $\rho_1^z = 1$,这位玩家就应该叫"高"而不是别的。$z > \frac{a-b}{a}$ 就是这样的情况。然而,对于较弱的牌,$\rho_1^z = \frac{b}{a+b}$,$\rho_3^z = 1 - \rho_1^z = \frac{a}{a+b}$,$\rho_1^z$,$\rho_2^z$ 都不等于零,这位玩家应该(以一定的概率)不规律地叫"高"和"低"。$z \leqq \frac{a-b}{a}$ 就属于这种情况。这种情况下,"高"开叫应该少于"低"开叫,事实上 $\frac{\rho_3^z}{\rho_1^z} = \frac{a}{b}$ 且 $a > b$。上述公式还表明,最后一类"高"开叫随着"高"开叫(相对于"低"开叫)代价的提高,"高"开叫越来越少见。

"弱"牌高叫是按照一定的概率不规律地做出的,而

且随"高"叫的代价的提高而减少。其显而易见的解释是:这些是普通扑克中的"诈叫"。

由于我们对扑克做出的极端简化,"诈叫"是以一种十分粗浅的方式出现的。不过,其象征性的含义无论如何是不会错的:有一手强牌($z > \frac{a-b}{a}$)的玩家应该总是叫"高";有一手"弱"牌($z < \frac{a-b}{a}$)的玩家应该在绝大多数情况下叫"低"(概率为$\frac{a}{a+b}$),但偶尔进行不规律的"诈叫"(概率为$\frac{b}{a+b}$)。

19.10.2　第二,作为"诈叫"的条件,区间 $0 \leqq z \leqq$ 205
$\frac{a-b}{a}$还联系着另外一个问题,即 17.10.1 和 17.10.2 中讨论的背离良策、"永久最优"、"防守"和"进攻"的后果问题。

我们假设玩家 2 背离良策,即使用概率 σ_j^z,不同于上面得到的 ρ_j^z,进一步假设玩家 1 仍使用 ρ_j^z,即良策,那么,我们能够对 γ_j^z 应用 19.7 中的(19:9:a*)、(19:9:b*)、(19:9:c*)以及图 41 的描述,并把对于玩家 1 来说的一局博弈的值用 19.7 中的(19:7*)表达出来

(19:22)　　$$K = \sum_j \int_0^1 \gamma_j^z \sigma_j^z dz\ 。$$

因此,玩家 2 的 σ_j^z 是针对玩家 1 的 ρ_j^z 的最优策略,如果 19.6 中(19:8)那样的条件得到满足:

(10:C)　　对于每一个数对 z, j，如果 γ_j^z 没有（在 j 内[①]）取得其最小值，那么，我们有 $\sigma_j^z = 0$。

也就是说，(19:C)是 σ_j^z 成为与 ρ_j^z 一样好的针对 ρ_j^z 的策略即给出 $K = 0$ 的充分必要条件。不然的话，σ_j^z 就是一个不好的策略，即给出 $K > 0$。换句话说：

(19:D)　　一个错误策略，即一个不同于良策 ρ_j^z 的策略 σ_j^z 在对手固守这一良策而不会遭受损失的充分必要条件是，σ_j^z 满足上面的(19:C)。

看一眼图 41 就会明白，(19:C)意味着，对于 $z > \frac{a-b}{a}$，σ_2^z，$\sigma_3^z = 0$；而对于 $z \leqq \frac{a-b}{a}$，仅仅有 $\sigma_2^z = 0$。[②]也就是说：(19:C)描述的是一手强牌（$z > \frac{a-b}{a}$）的"高"叫牌，没有别的；对于任何一手牌，它都杜绝了"低"叫牌而后选择"跟了"，但是，对于一手弱牌，即落入"诈叫"区间（$z \leqq \frac{a-b}{a}$）的牌，它未能描述"高"叫牌出现的概率和"低"叫牌而后选择"不叫"的概率。

19.10.3 因此，对良策的任何背离，其中不仅仅包括不正确的"诈叫"，都将带来直接的损失，对手只要固守良策就足够了。当对手固守良策时，不正确的"诈叫"不会带

---

① 意思是在 j 内，而不是在 z, j 内！——205，①

② 事实上，在某一个地方 $\sigma_2^z = 0$ 是允许的，但 z 的这一孤立值的概率是0，从而能够被忽略。见第 200 页脚注 ③。——205，②

来损失，但是，对手能够通过适当背离良策给你造成损失。 206
也就是说，"诈叫"的意义不是在实际博弈中对付一个好的玩家，而在于用它防止对手背离良策。这与19.2末尾的说明一致，尤其与我们在那里给出的"诈叫"的第二种解释一致。[①] 事实上，"诈叫"带来的不确定因素恰恰是我们在那里做出的对手策略约束，这已经在 19.2 末尾得到分析。

我们关于"诈叫"的结果还符合 17.10.2 的结论。我们看到，扑克的这一变形的惟一一个良策是不求永久最优，从而，根本不存在永久最优。（见 17.10.2 第一点说明，尤其是第 163 页脚注③。）而且，从 17.10.2 的第二部分讨论的意义上说，"诈叫"是防守性的。

19.10.4 最后，让我们看一下上面提到的进攻步骤，即通过背离良策，一位玩家能够从对手不正确的"诈叫"中得到的好处。

我们交换一下玩家的角色：令玩家 1 不正确地"诈叫"，即使用不同于图 40 的 ρ_j^z。由于只涉及不正确的"诈叫"，我们仍然假设

$$\text{对于所有的 } z \qquad \rho_2^z = 0$$

$$\text{对于所有的 } z > \frac{a-b}{a}, \begin{cases} \rho_1^z = 1 \\ \rho_3^z = 0 \end{cases}$$

这样，我们感兴趣的只是下面的结果

① 这些对于我们正在考虑的扑克类型都成立。进一步的讨论见 19.16。——206，①

(19:23) $\rho_1^z \gtrless \frac{b}{a+b}$对于某些 $z = z_0 < \frac{a-b}{a}$成立。[①]

19.8 中的(19:15)的左边仍然是 $\gamma_3^z - \gamma_1^z$ 的一个正确表达式。考虑一个 $z < z_0$，那么，(19:23)中的 ≷ 保留 $\int_0^z \rho_1^z \mathrm{d}z_1$ 不受影响，但它增加(减少)$\int_z^1 \rho_1^z \mathrm{d}z_1$，从而，它减少(增加)(19:15)的左边，即 $\gamma_3^z - \gamma_1^z$。由于不改变(19:23) $\gamma_3^z - \gamma_1^z$ 也会等于0(见图 41)，因此，它将 ≤0。即 $\gamma_3^z \leq \gamma_1^z$。然后，考虑一个 z，

$$z_0 < z \leqq \frac{a-b}{a}。$$

207 那么，(19:23)中 ≷ 增加(减少) $\int_0^z \rho_1^z \mathrm{d}z_1$，而$\int_z^1 \rho_1^z \mathrm{d}z_1$ 保持不变，从而，它增加(减少)(19:15)的左边，即 $\gamma_3^z - \gamma_1^z$。由于不改变(19:23)，$\gamma_3^z - \gamma_1^z$ 也会是0(见图 41)，因此它将 ≷ 0，即 $\gamma_3^z \gtrless \gamma_1^z$。总之：

(19:E) 有着 ≷ 的变换(19:23)造成

$$\gamma_3^z \lesseqgtr \gamma_1^z \qquad z < z_0,$$

$$\gamma_3^z \gtrless \gamma_1^z \qquad z_0 < z \leqq \frac{a-b}{a}。$$

所以，对手能够得到好处，即通过使用不同于当前的 ρ_j^z 的 σ_j^z 来减少(19:22)的 K：对于 $z < z_0$，以 $\sigma_1^z(\sigma_3^z)$ 为代价增加

---

① 我们的确需要一个以上的 z 满足这一条件，见第 200 页脚注③。这一简单假设是，这些不等式在 z_0 的一个小的邻域内成立。根据第 199 页脚注④和第 200 页脚注③，对这一问题进行严格数学处理并不困难。出于与那里同样的理由，我们不这么做。——206，②

$\sigma_3^z(\sigma_1^z)$，即把 σ_1^z 从 ρ_1^z 的值$\frac{b}{a+b}$减少（增加）到端点值 0（1）；对于 $z_0 < z \leqq \frac{a-b}{a}$，以 $\sigma_3^z(\sigma_1^z)$ 为代价增加 $\sigma_1^z(\sigma_3^z)$，即把 σ_1^z 从 ρ_1^z 的值$\frac{b}{a+b}$增加（减少）到端点值 1（0）。换句话说：

（19:F）　对于给定的一手牌 z_0，如果对手"诈叫"太多（太少），那么，你能够以如下方式对其背离良策进行惩罚：对于比 z_0 弱的一手牌，"诈叫"更少（更多）；对于比 z_0 强的牌，"诈叫"更多（更少）。

也就是说，模仿他拿比 z_0 强的牌时的错误，而与他拿弱牌时的做法相反。

这就详细描述了如何做出正确"诈叫"以防止对手"诈叫"过多或过少，并且给出了这么做的结果。这方面的讨论能够深入下去，但我们不想这么做。

19.11　更加一般的扑克

19.11　前面的讨论使我们对扑克的策略结构和可能结果有了一些认识，但是，这些结果的推导要归于我们对博弈规则的简化。这些简化是 19.1、19.3、19.7 中做出的。要真正理解这一博弈，我们就应该将这些简化去掉。

这并不是说，我们（在 19.1 中）已经去掉的该博弈中的所有复杂因素都必须重新出现①，不过，这一博弈的某些简单且重要的特征的确被去掉了，而且重新对其进行分 208

---

① 我们不想这么做，我们只考虑二人博弈！——207，①

析是非常有意义的。特别是：

（A）各手牌应该是离散的，而不是连续的（见19.7）。

（B）应该有两种以上的叫牌方式（见19.3）。

（C）应该给每一位玩家多于一次的叫牌机会，而且应该考虑交替叫牌，而不是同时叫牌（见19.3）。

我们尚且不能在同时满足（A）、（B）、（C）的条件下找到良策。因此，我们只能分别加上条件（A）、（B）、（C）。

对于（A）和（B），我们已经有了完美的答案。但是，对于（C），取得的进步十分有限。要详细给出这些数学推导就走得太远了，我们将简单提一下有关（A）、（B）、（C）的一些结果。

19.12 各手牌离散的情况

19.12.1 首先考虑（A），即回到我们在19.1.2末尾引入的、并在19.4—19.7中使用的衡量各手牌的离散刻度。这种情况下的解在很多方面类似于图40中的解。一般来说，$\rho_2^s=0$，而且存在一个一定的s^0，使得$s>s^0$时，$\rho_1^s=1$；$s<s^0$时，$\rho_1^s\neq 0,1$。还有，如果我们换成z刻度（见图39），那么，$\frac{s^0-1}{S-1}$十分接近$\frac{a-b}{a}$。[①] 这样，正如图40所表明的那样，我们有一个"诈叫"区域，在它的上边是"高"叫牌区域。

但是，对于$s<s^0$，即在"诈叫"区域内，ρ_1^s却根本不等

① 严格说，当$S\to\infty$时，$\frac{s^0-1}{S-1}\to\frac{a-b}{a}$。——208，①

于或接近图 40 中的$\frac{b}{a+b}$。① 它们围绕这个值摆动，其摆动幅度依赖于 S 的特定算术性质，但当 $S \to \infty$ 时，这种摆动并不呈现出消失的趋势。然而，ρ_1^s 的平均趋于$\frac{b}{a+b}$。② 换句话说：

这一离散博弈的良策十分类似于其连续博弈的良策："诈叫"区域和"高"叫牌区域的划分，这些区域的位置和大小，以及发生在"高"叫牌区域中的事情，这些都十分相似。但是，在"诈叫"区域中，这种相似性只能就若干强弱相当的牌的平均而言。单就一手牌而言，精确过程很可能不同于图 40 中的情况，并依赖于 s 和 $S(a/b)$ 的算术 209
性质。③

19.12.2 因此，较严格地对应着图 40 的策略——即对所有 $s < s^0$，$\rho_1^s = \frac{b}{a+b}$——不是良策，且与良策相当不同。不过，我们能够证明，使用这一"平均"策略的最大损失并不大。严格说，当 $S \to \infty$ 时，它趋于 0。④

---

① 也就是说，无论 s 如何变动，当 $S \to \infty$ 时，ρ_1^s 的极限都不是$\frac{a}{a+b}$。——208，②。

② 事实上，对于大多数 $s < s^0$，$\frac{1}{2}(\rho_1^s + \rho_1^{s+1}) = \frac{b}{a+b}$。——208，③

③ 因此，在图 40 的等价图中，图形的左半部分将不是直线（在 $0 \leq z \leq \frac{a-b}{a}$ 中，$\rho = \frac{b}{a+b}$），而是一条围绕这个平均值剧烈波动的线。——209，①

④ 它实际是 $1/S$。请回忆一下，在实际扑克中，S 大约是 250 万。（见第 187 页脚注④。）——209，②

这样，我们看到：在离散博弈中，正确的"诈叫"方式有一个十分复杂的"精细结构"，它能够给使用者带来很小的优势。

这有可能是一个典型的现象，并且频繁出现在比较复杂的实际博弈之中。它证明，当我们断定或期望这一理论中的连续性时，我们必须十分小心。① 不过，其实际意义是，由此造成的收益或损失很小，而且即使是对于一个非常有经验的玩家来说，也存在着未知的事情。

19.13 *m* 个可能的叫牌

19.13.1 然后考虑（B）：即保持各手牌之间的连续性，但允许以两种以上的方式叫牌。也就是说，我们用更多个数的叫牌替换两种叫牌

$$a > b\,(>0)。$$

假设有 m 种叫牌，它们的排序是：

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_{m-1} > a_m\,(>0)。$$

这种情况下的解也与图 40 中的解有一定的相似之处。② 存在一个确定的 $z^0$③，使得 $z > z^0$ 时，这位玩家应该做出最高叫牌，并不再做其他事情；当 $z < z^0$ 时，他应该以一定的概率不规律地变化叫牌水平（总是包括最高叫牌 a 和其

---

① 请回忆第 198 页脚注④第二部分中的说明。——209，③

② 在对规则做出进一步限制的情况下，结果才是确定的。对规则的进一步限制是，在对手叫得更高时，禁止选择"跟了"，即每位玩家预计会做出他的最终和最高叫牌，如果他的对手叫得更高，他选择"不叫"（并接受结果）。——209，④

③ 类似于图 40 中的$\frac{a-b}{a}$。——209，⑤

他）。必须以多大概率做出什么叫牌是由 z 的值决定的。[1] 210
因此，正如图 40 表明的那样，我们有一个“诈叫”区域，且它之上是一个“高”叫牌区域——实际是最高叫牌且无其他事情。但是，在其自身区域 $z \leqq z^0$ 之内，与图 40 相比，“诈叫”有着更为复杂多变的结构。

尽管这一结构有着某些有意思的方面，我们并不详细分析这一结构。然而，我们将提到它的一个奇特之处。

19.13.2　给定两个值

$$a > b > 0。$$

用它们分别代表最高叫牌和最低叫牌：

$$a_1 = a, \quad a_m = b。$$

令 $m \to \infty$ 且选取其余叫牌 $a_2, \cdots, a_{m-1}$ 使得它们无限稠密地填满区间

(19:24)　$$b \leqq x \leqq a$$

（见下面脚注②中给出的两个例子）。如果上面描述的良策趋于某一极限，即趋于一个 $m \to \infty$ 的渐近策略，那么，你能够将其解释为一个良策，其中只有上界和下界是确定下来的（a 和 b），叫牌能够是区间（19:24）中的任何点。也

---

① 如果他必须做出的叫牌是 $a_1, a_p, a_q, \cdots, a_n$ $(1 < p < q < \cdots < n)$，那么，我们能够证明，它们的概率必定分别是

$$\frac{1}{ca_1}, \frac{1}{ca_p}, \frac{1}{ca_q}, \cdots, \frac{1}{ca_n}, \left(c = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_p} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right)$$

即如果要做出一定的叫牌，那么，其概率必定与其代价呈反比。

对于给定的 $z, a_p, a_q, \cdots, a_m$ 中何者实际出现取决于一个更为复杂的准则。我们不在这里讨论它。

注意，上述 c 的必要性在于使概率之和等于 1。读者可以自己验证图 40 中的概率具有上述值。——210，①

就是说，19.3 开头提到的两个叫牌之间的一个最小区间的要求被去掉了。

现在，情况并不是这样。例如，我们能够在 $a_1 = a$ 和 $a_m = b$ 之间插入 $a_2, \cdots, a_{m-1}$，它们可以是算术序列，也可以是几何序列。① 一个渐近策略能够以两种方式中的任一个得到，但两个策略在很多基本方面大不相同。

如果我们考虑一个博弈，其中(19:24)中的任意叫牌都是允许的，那么，直接决定其良策是可能的。事实上，上
211 面提到的两个策略都是良策，还有着其他很多良策。

这表明，两个叫牌之间有一个最小区间这一假设的放弃能够带来多么大的复杂性：一个极限情况的良策不是有限多个叫牌情况下的良策的近似。19.12 的结论再次得到了强调。

19.14 交替叫牌

19.14.1 最后，考虑情况(C)：迄今为止，我们在这方面取得的进步是，我们能够用两位玩家交替叫牌来替换两个玩家的同时叫牌，即玩家 1 先叫，然后玩家 2 叫。

这样，19.4 中陈述的规则被修改为：

首先，每位玩家借助一个机会动作得到他手中的牌 $s = 1, \cdots, S$，这些数中的每一个具有相同概率 $1/S$。我们用 s_1, s_2 分别记玩家 1 和玩家 2 的牌。

---

① 前者的定义是

$$a_p = \frac{1}{m-1}[(m-p)a + (p-1)b] \quad p = 1, 2, \cdots, m-1, m。$$

后者的定义是：

$$a_p = \sqrt[m-1]{a^{m-p}b^{p-1}} \quad p = 1, 2, \cdots, m-1, m。$$ ——210，②

其次[①]，玩家 1 借助一个个人动作选择 a 或 b——"高"或"低"叫牌。[②] 他这么做时，知道自己手里的牌，但不知道对手手里的牌。如果他叫"低"，那么，该博弈结束。如果他叫"高"，那么，玩家 2 将借助一个个人动作，选择 a 或 b——"高"或"低"叫牌。[③] 他这么做时，知道自己手里的牌和对手的选择，但不知道对手手里的牌。

当一局博弈结束时，按如下方式支付：如果玩家 1 叫"低"，那么，视 $s_1 >$、$=$、$< s_2$，玩家 1 从玩家 2 那里得到的数额分别是 b、0、$-b$；如果两位玩家都叫的是"高"，那么，视 $s_1 >$、$=$、$< s_2$，玩家 1 从玩家 2 那里得到的数额分别是 a、0、$-a$；如果玩家 1 叫"高"且玩家 2 叫"低"，那么，玩家 1 从玩家 2 那里得到数额 b。[④]

19.14.2　现在，我们能够讨论纯策略和混合策略了，这基本上类似于 19.5 中最基本的扑克变形。

我们给出这一讨论的主要思路，对于还记得 19.4—19.7 的过程的读者来说，这是完全清楚的。

在这一博弈中，一个纯策略显然由下述指定组成：对于每一手牌 $s = 1, \cdots, S$，指出将要做出的叫牌是"高"还是"低"。用一个数值指数描述更为简单：$i_s = 1$ 意味着"高" 212
叫牌，$i_s = 2$ 意味着"低"叫牌。因此，一个策略就是对每个

---

① 从这里开始，我们可以设想这是玩家 2 已经叫过"低"的继续，现在轮到玩家 1 选择"跟了"或"争叫"。在这一阶段，我们不考虑"不叫"。——211，①

② "争叫"或"不叫"，见脚注①。——211，②

③ 即"跟了"或"不叫"。注意脚注②以后其意思的变化。——211，③

④ 请回忆上面的脚注，解释这些规则。从形式的角度看，我们应该回忆第 191 页脚注①，细节上略作修改。——211，④

$s=1,\cdots,S$ 指定一个指标 i_s，即一个序列 $i_1,\cdots,i_S$。

这同时适用于玩家 1 和玩家 2。相应地，我们将用 $\sum_1(i_1,\cdots,i_S)$ 或 $\sum_2(j_1,\cdots,j_S)$ 记上述策略。因此，每一博弈具有相同个数的策略，其个数是序列 $i_1,\cdots,i_S$ 的个数，即 2^S。使用 11.2.2 中的符号

$$\beta_1=\beta_2=\beta=2^S。$$

（不过，这一博弈不对称！）

接下来，我们必须描述的是，如果两位玩家使用了策略 $\sum_1(i_1,\cdots,i_S)$ 和 $\sum_2(j_1,\cdots,j_S)$，玩家 1 收到的支付。这是矩阵元素 $H(i_1,\cdots,i_S|j_1,\cdots,j_S)$。如果两位玩家手中的牌分别是 s_1 和 s_2，那么，以此方式（使用上述规则），玩家 1 收到的支付能够表达为：它是 $L_{sgn(s_1-s_2)}(i_{s_1},j_{s_2})$，其中 $sgn(s_1-s_2)$ 是 s_1-s_2 的正负号，且三个函数

$$L_+(i,j),\quad L_0(i,j),\quad L_-(i,j)$$

能够分别用下列矩阵表示：

i \ j	1	2
1	a	b
2	b	b

图 42

i \ j	1	2
1	0	b
2	0	0

图 43

i \ j	1	2
1	$-a$	b
2	$-b$	$-b$

图 44

如上所述，s_1,s_2 来自机会动作。因此，

$$H(i_1,\cdots,i_S|j_1,\cdots,j_S)=\frac{1}{S^2}\sum_{s_1,s_2=1}^{S}L_{sgn(s_1-s_2)}(i_{s_1},j_{s_2})。$$

19.14.3 接下来，我们转向 17.2 意义上的混合策略。

它们是属于 S_β 的向量 $\vec{\xi},\vec{\eta}$。我们必须标出这些向量的(像)纯策略的分量:我们必须将其写成 $\xi_{i_1,\cdots,i_s},\eta_{j_1,\cdots,j_s}$,而不将其写成 $\xi_{\tau_1},\eta_{\tau_1}$。

我们给出 17.4.1 的(17:2),它描述的是玩家 1 的收益期望

$$K(\vec{\xi},\vec{\eta})=\sum_{i_1,\cdots,i_s,j_1,\cdots,j_s}H(i_1,\cdots,i_S|j_1,\cdots,j_S)\xi_{i_1,\cdots,i_s}\eta_{j_1,\cdots,j_s}$$
$$=\frac{1}{S^2}\sum_{i_1,\cdots,i_s,j_1,\cdots,j_s}\sum_{s_1,s_2=1}L_{sgn(s_1-s_2)}(i_{s_1},j_{s_2})\xi_{i_1,\cdots,i_s}\eta_{j_1,\cdots,j_s}。$$

但两个 $\sum$ 交换并写成如下方式是有好处的　213

$$K(\vec{\xi},\vec{\eta})=\frac{1}{S^2}\sum_{s_1,s_2,\cdots}^{S}\sum_{i_s,j_1,\cdots,j_s}L_{sgn(s_1-s_2)}(i_{s_1},j_{s_2})\xi_{i_1,\cdots,i_s}\eta_{j_1,\cdots,j_s}。$$

如果我们令

(19:25)
$$\rho_i^{s_1}=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_s 且\\ i_{s_1}|i_1,\cdots,i_s|}}\xi_{i_1,\cdots,i_s},$$

(19:26)
$$\sigma_j^{s_2}=\sum_{\substack{j_1,\cdots,j_s 且\\ j_{s_2}|j_1,\cdots,j_s|}}\eta_{j_1,\cdots,j_s},$$

那么,上述方程变成

(19:27)
$$K(\vec{\xi},\vec{\eta})=\frac{1}{S^2}\sum_{s_1,s_2}^{S}\sum_{i,j}L_{sgn(s_1-s_2)}(i,j)\rho_i^{s_1}\sigma_j^{s_2}。$$

19.14.4　所有这些都与 19.5.2 完全一样。正如那里的情况那样,(19:25)表明,$\rho_i^{s_1}$ 是玩家 1 手里的牌是 s_1 时使用混合策略 $\vec{\xi}$ 做出选择 i 的概率。(19:26)表明,$\sigma_j^{s_2}$ 是玩家 2 手里的牌是 s_2 时使用混合策略 $\vec{\eta}$ 做出选择 j 的概率。同样,直觉上清楚的是,期望值 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 仅仅依赖于这些概率,而不依赖于潜在概率 $\xi_{i_1,\cdots,i_s},\eta_{j_1,\cdots,j_s}$ 本身。(19:27)表达了

这一点，并且能够轻易地基于这一基础推导出来。

还清楚的一点是，$\rho_i^{s_1}$，$\sigma_j^{s_2}$ 的含义以及它们的正式定义(19:25)，(19:26)表明，它们满足下述条件：

$$(19{:}28)\qquad \rho_i^{s_1} \geqq 0 \quad \sum_{i=1}^{2} \rho_i^{s_1} = 1,$$

$$(19{:}29)\qquad \sigma_j^{s_2} \geqq 0 \quad \sum_{j=1}^{2} \sigma_j^{s_2} = 1,$$

而且，任何满足这些条件的 $\rho_i^{s_1}$，$\sigma_j^{s_2}$ 都能够借助(19:25)和(19:26)从适宜的 $\vec{\xi}$，$\vec{\eta}$ 得到。(见 19.5.2 中的相应步骤尤其见第 194 页脚注①。)这刚好形成两个二维向量

$$\vec{\rho}^{s_1} = \{\rho_1^{s_1}, \rho_2^{s_1}\}, \quad \vec{\sigma}^{s_2} = \{\sigma_1^{s_2}, \sigma_2^{s_2}\}。$$

那么，(19:28)，(19:29)恰恰说明，所有 $\vec{\rho}^{s_1}$，$\vec{\sigma}^{s_2}$ 都属于 S_2。

214 因此，$\vec{\xi}$(或 $\vec{\eta}$)是 S_β 中的一个向量，即依赖于 $\beta-1=2^S-1$ 个常数；$\vec{\rho}^{s_1}$(或 $\vec{\sigma}^{s_2}$)是 S_2 中的 S 个向量，即每一个依赖于一个数字常数，因此，它们合起来组成 S 个数字常数。这样，我们就从 2^S 简缩到了 S(见 19.5.3 末尾)。

19.14.5 现在，像在 19.6 中做的那样，我们重写(19:27)

$$(19{:}30)\qquad K(\vec{\rho}^{1}, \cdots, \vec{\rho}^{S} \mid \vec{\sigma}^{1}, \cdots, \vec{\sigma}^{S}) = \frac{1}{S} \sum_{s_2, j} \gamma_j^{s_2} \sigma_j^{s_2},$$

有系数

$$\frac{1}{S}\gamma_j^{s_2} = \frac{1}{S^2} \sum_{s_1, i} L_{\mathrm{sgn}(s_1 - s_2)}(i, j)\rho_i^{s_1},$$

利用图 42—44 中的矩阵图，

$$(19{:}31{:}\mathrm{a})\ \gamma_1^{s_2} = \frac{1}{S}\Big\{\sum_{s_1=1}^{s_2-1} (-a\rho_1^{s_1} - b\rho_2^{s_1}) + \sum_{s_1=s_2+1}^{S} (a\rho_1^{s_1} + b\rho_2^{s_1})\Big\},$$

(19:31:b) $\gamma_2^{s_2}=\frac{1}{S}\left\{\sum_{s_1=1}^{s_2-1}(b\rho_1^{s_1}-b\rho_2^{s_1})+b\rho_1^{s_2}+\sum_{s_1=s_2+1}^{S}(b\rho_1^{s_1}+b\rho_2^{s_1})\right\}$。

由于这一博弈不再是对称的，我们还需要其中交换玩家角色的公式，这一公式是

(19:32) $K(\vec{\rho}^1,\cdots,\vec{\rho}^S\mid\vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\sigma}^S)=\frac{1}{S}\sum_{s_1,i}\delta_i^{s_1}\rho_i^{s_1}$，

具有系数

$$\frac{1}{S}\delta_i^{s_1}=\frac{1}{S^2}\sum_{s_2,j}L_{sgn(s_1-s_2)}(i,j)\sigma_j^{s_2},$$

利用图 42—44 中的矩阵图，

(19:33:a) $\delta_1^{s_1}=\frac{1}{S}\left\{\sum_{s_2=1}^{s_1-1}(a\sigma_1^{s_2}+b\sigma_2^{s_2})+b\sigma_2^{s_1}+\sum_{s_2=s_1+1}^{S}(-a\sigma_1^{s_2}+b\sigma_2^{s_2})\right\}$，

(19:33:b) $\delta_2^{s_1}=\frac{1}{S}\left\{\sum_{s_2=1}^{s_1-1}(b\sigma_1^{s_2}+b\sigma_2^{s_2})+\sum_{s_2=s_1+1}^{S}(-b\sigma_1^{s_2}-b\sigma_2^{s_2})\right\}$。

判断良策的准则基本上是 19.6 中准则的重复，即由于我们现在考虑的这一博弈的非对称性，就像 19.6 的准则能够从 17.11.2 末尾的对称准则得到那样，我们可以从 17.9 的一般准则(17:D)得出当前准则。也就是说： 215

(19:G)　　属于 S_2 的 $\vec{\rho}^1,\cdots,\vec{\rho}^S$ 和 $\vec{\sigma}^1,\cdots,\vec{\sigma}^S$ 描述的是良策，其充分必要条件是：

对于每一对 s_2,j，如果 $\gamma_j^{s_2}$ 没有(在 j 中)取得其最小值，那么，我们有 $\sigma_j^{s_2}=0$；对于每一对 s_1,i，如果 $\delta_i^{s_1}$ 没有(在 i 中)取得其最大值，那么，我们有 $\rho_i^{s_1}=0$。

19.14.6　接下来，我们用 19.7 意义上各手牌连续的情况取代离散的 s_1,s_2。(尤其见那里的图 39。)如 19.7 描述的那样，这等于用向量 $\vec{\rho}^{z_1}$，$\vec{\sigma}^{z_2}$ $(0\leqq z_1,z_2\leqq 1)$ 替换 $\vec{\rho}^{s_1}$，

$\vec{\sigma}^{z_2}$ $(s_1, s_2 = 1, \cdots, S)$，它们仍然是具有相同性质的概率向量，即仍然属于 S_2。所以，分量 $\rho_i^{s_1}, \sigma_j^{s_2}$ 让位于分量 $\rho_i^{z_1}, \sigma_j^{z_2}$。类似地，$\delta_i^{s_1}, \gamma_j^{s_2}$，变成 $\delta_i^{z_1}, \gamma_j^{z_2}$。就像 19.7 中的（19:7*）、（19:9:a*）、（19:9:b*）和（19:9:c*）那样，公式（19:30）、（19:31:a）、（19:31:b）、（19:32）、（19:33:a）和（19:33:b）中的求和变成积分。所以，我们有：

（19:30*）　$K = \sum_j \int_0^1 \gamma_j^{z_2} \sigma_j^{z_2} \mathrm{d}z_2$，

（19:31:a*）　$\gamma_1^{z_2} = \int_0^{z_2} (-a\rho_1^{z_1} - b\rho_2^{z_1}) \mathrm{d}z_1 + \int_{z_2}^1 (a\rho_1^{z_1} + b\rho_2^{z_1}) \mathrm{d}z_1$，

（19:31:b*）　$\gamma_2^{z_2} = \int_0^{z_2} (b\rho_1^{z_1} - b\rho_2^{z_1}) \mathrm{d}z_1 + \int_{z_2}^1 (b\rho_1^{z_1} + b\rho_2^{z_1}) \mathrm{d}z_1$，

以及

（19:32*）　$K = \sum_i \int_0^1 \delta_i^{z_1} \rho_i^{z_1} \mathrm{d}z_1$，

（19:33:a*）　$\delta_1^{z_1} = \int_0^{z_1} (a\sigma_1^{z_2} + b\sigma_2^{z_2}) \mathrm{d}z_2 + \int_{z_1}^1 (-a\sigma_1^{z_2} + b\sigma_2^{z_2}) \mathrm{d}z_2$，

（19:33:b*）　$\delta_2^{z_1} = \int_0^{z_1} (b\sigma_1^{z_2} + b\sigma_2^{z_2}) \mathrm{d}z_2 + \int_{z_1}^1 (-b\sigma_1^{z_2} - b\sigma_2^{z_2}) \mathrm{d}z_2$。

这样，我们的良策准则同样被转换过来了。（这如同从 19.6 中的从离散准则到 19.7 中的连续准则的转换。）我们得到

（19:H）　属于 S_2 的 $\vec{\rho}^{z_1}$ 和 $\vec{\sigma}^{z_2}$ $(0 \leqq z_1, z_2 \leqq 1)$ 描述的是良策，其充分必要条件是：

对于每一对 z_2, j，如果 $\gamma_j^{z_2}$ 没有（在 j 中）取得其最小值，那么，我们有 $\sigma_j^{z_2} = 0$。对于每一对 z_1, i，如果 $\delta_i^{z_1}$ 没有（在 i 中）取得其最大值，那么，我们有 $\rho_i^{z_1} = 0$。

19.15　全部解的数学描述

19.15.1　良策 $\vec{\rho}'$，$\vec{\sigma}'$ 的决定，即 19.14 末尾指出的隐 216
含条件的解的决定能够充分得到说明。做到这一点的数学方法类似于 19.8 中确定扑克的基本变形中的良策——即 19.7 末尾指出的隐含条件的解——的那些方法。

我们不在这里给出数学讨论，但是我们将描述它所给出的良策 $\vec{\rho}'$，$\vec{\sigma}'$。

有且只有一个良策 $\vec{\rho}'$，但是良策 $\vec{\sigma}'$ 却形成一个广泛的族。（见图 45—46。这些图的实际比例是 $a/b \sim 3$。）

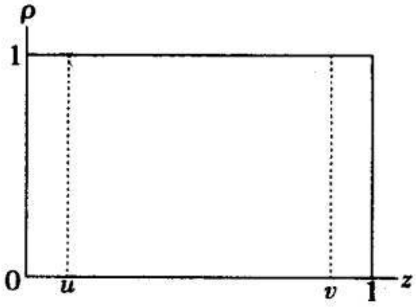


图 45

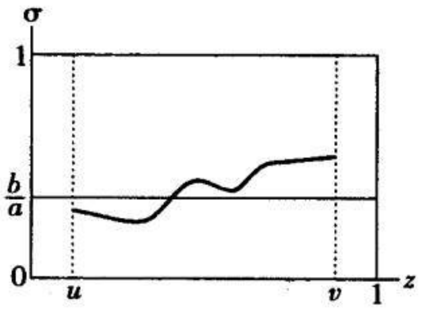


图 46

$$u = \frac{(a-b)b}{a(a+3b)}$$

$$v = \frac{a^2 + 2ab - b^2}{a(a+3b)}$$

图中粗直线分别代表 $\rho = \rho_1^z$，$\sigma = \sigma_1^z$。因此，粗直线高于 $\rho = 0$（$\sigma = 0$）的高度是"高"叫牌的概率，ρ_1^z（σ_1^z）；$\rho = 1$（$\sigma = 1$）高于粗线的高度是"低"叫牌的概率，$\rho_2^z = 1 - \rho_1^z$

($\sigma_2^s = 1 - \sigma_1^s$)。图 46 中，区间 $u \leqq z \leqq u$ 上，$\sigma = \sigma_1^s$ 曲线的不规则的粗曲线部分代表着良策 $\vec{\sigma}^s$ 的多样性。事实上，$\sigma = \sigma_1^s$ 曲线的这一部分满足如下（充分必要）条件：

$$\frac{1}{v - z_0}\int_{z_0}^{v} \sigma_1^s \mathrm{d}z \begin{cases} = \dfrac{b}{a} & \text{当 } z_0 = u \\ \geqq \dfrac{b}{a} & \text{当 } u < z_0 < v \end{cases}$$

文字表达为：σ_1^s 在 u 和 v 之间的平均值是 b/a，而且在这一区间的右端点上，σ_1^s 的平均值总是 $\geqq b/a$。

217 因此，$\vec{\rho}^s$ 和 $\vec{\sigma}^s$ 在下述三个区间上有三种不同表现：①

首先，$0 \leqq z < z$；第二，$u \leqq z \leqq u$；第三，$v < z \leqq 1$。这三个区间的长度分别是 $u, v - u, 1 - v$，而且，关于 u, v 的有点复杂的表达式能够借助如下容易验证的比率记忆，这些比率是：

$$u : (1 - v) = (a - b) : (a + b),$$
$$(v - u) : 1 - v = a : b。$$

19.15.2 19.14.6 中的公式(19:31:a*)、(19:31:b*)和(19:33:a*)、(19:33:b*)允许我们计算系数 γ_j^s, δ_i^s。我们给出(19.9 中图 41 那样的)图示，而不给出公式，并把基本的验证工作留给读者。在识别良策 $\vec{\rho}^s, \vec{\sigma}^s$ 时，惟有 $\delta_1^s - \delta_2^s, \gamma_2^s - \gamma_1^s$ 有意义：事实上，19.14 末尾的准则能够被解释为，每当这个差 > 0，那么，ρ_2^s 或 $\sigma_2^s = 0$；而且，当这个差 < 0 时，ρ_1^s 或 $\sigma_1^s = 0$。因此，我们给出这些差的图示。（见图 47，图 48。这些图的实际比例是图 45 和图 46 的比例，即 $a/b \sim 3$。）

---

① 注意这些区间的端点。见第 200 页脚注③。——217，①

图中普通的线代表曲线 $\gamma=\gamma_2^z-\gamma_1^z$；加了结点的线代表 $\delta=\delta_1^z-\delta_2^z$。图 48 中，$\delta=\delta_1^z-\delta_2^z$ 在区间 $u\leqq z\leqq v$ 上的不规则部分对应着图 46 中 $\sigma=\sigma_1^z$ 在同一区间上的不规则部分，即它也代表良策 $\vec{\sigma}^z$ 的多样性。$\sigma=\sigma_1^z$ 曲线的那一部分受到的约束（见图 46 后面的讨论）意味着，$\delta=\delta_1^z-\delta_2^z$ 曲线的这一部分必须落在图 48 中的阴影区域之内。

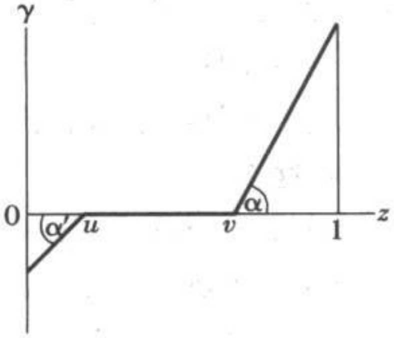


图 47

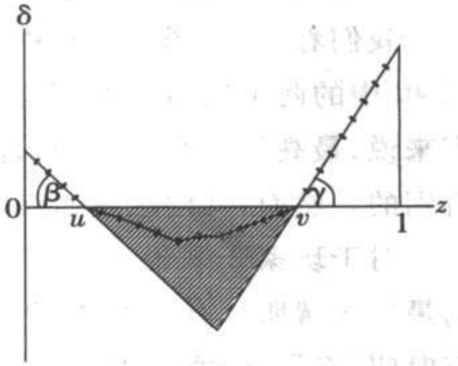


图 48

19.15.3　比较图 45 和图 47，图 46 和图 48，我们看到，我们的策略的确是良策，即它们满足（19:H）。我们请读者对照 19.9 中图 40 与图 41 的比较验证这一点。

K 的值还能够从 19.14.6 中的（19:30*）或（19:32*） 218
得到。这一结果是：

$$K=bu=\frac{(a-b)b^2}{a(a+3b)}。①$$

---

① 关于数字确定：如果 $a/b=3$，即我们的所有图形以这一比率为基础，那么，$u=\frac{1}{2}$，$v=\frac{7}{9}$ 且 $K=\frac{b}{9}$。——218，①

因此，玩家 1 对这一博弈有一个正的期望值，即有优势①，这显然能够归因于他占据着开叫的位置。

19.16 解的解释：结论

19.16.1 像 19.10 中讨论 19.8、19.9 中的结果那样，我们也能够讨论 19.15 中的结果。不过，我们并不打算为此占用大量篇幅，只想给出几点说明。

我们看到，在图 45、46 中出现的是三个区域，而不是图 40 中的两个区域。在所有这些图形中，即对于两位玩家来说，最高的一个（向右最远）对应着"高"叫牌，再也没有别的。然而，其他区域的表现就没有这么一致。

对于玩家 2 来说，（图 46），中间区域描述的是图 40 的最低区域所具有的那种"诈叫"，即同一手牌，不规律地有时叫"高"，有时叫"低"。如图 40 所示，概率虽非任意，却也不是惟一确定的。② 还有，图 46 中存在一个较低的区域，玩家 2 必须在这一区域中做出"低"叫牌，即他手中的牌太弱，不宜表现出那种混合行为。

再有，在玩家 2 的中间地带，像图 41 那样，$\gamma_2^z - \gamma_1^z = 0$，$\gamma_j^z$ 同样表现出无所谓，因此，他在这一地带的行为动机

---

① 对于 $a/b \sim 3$，这一优势大约是 $b/9$（见上面脚注①），即大约是"低"叫牌的 11%。——218，②

② 见图 46 后面的讨论。事实上，用 $\sigma_1^z = 0$ 和 1 来满足那些要求甚至也是可能的；例如，在中间区间的低于 $\frac{a-b}{a}$ 的部分，$\sigma_1^z = 0$；在高于 $\frac{b}{a}$ 的部分，$\sigma_1^z = 1$。

这样一个解（即 $\sigma_1^z \neq 0, 1$，且由图 45，$\rho_1^z \neq 0, 1$）的存在性当然意味着扑克的这一变形是严格决定的。但是，以此为基础的讨论并不给出图 46 中实际画出的那种解。——218，③

像 19.10 最后一部分中讨论的那样直接。事实上，这些“高”叫牌更多地是反“诈叫”防守措施，而不是真正的“诈叫”。由于玩家 2 的这次叫牌是这一局的结束，后一种动机的确不存在，但是，有必要借助偶尔的“高”叫牌——通过“跟了”——控制对手的“诈叫”。

对于玩家 1（图 45）来说，情况则不同。在最低地带，他必须叫“高”，并且不再做其他事情；在中间地带，叫“低”并不再做其他事情。拿一手十分弱的牌而叫“高”——而拿一手中等牌叫“低”，就其纯粹形式而言，属于进攻性的“诈叫”。在“诈叫”地带（即最低地带），δ_1^s 并非可有可无：图 48 中 $\delta_1^s - \delta_2^s > 0$，即这些条件下的任何失败的“诈叫”都会导致一时的损失。 219

19.16.2　总结：扑克的这一新的变形使我们区别了两种“诈叫”：纯粹进攻性“诈叫”，由占据开叫地位的玩家做出；防守性“诈叫”，由最后叫牌的玩家做出，对于有“诈叫”嫌疑的对手，不规律地选择“跟了”，甚至在有一手中等牌的情况下也会这么做。在扑克的最初变形中，由于两位玩家同时叫牌，开叫地位在他们之间平分了，其中包含着我们现在能够将其看作这两件事情的混合的一个过程。①

---

① 第 186 页脚注②中提到的波莱尔的分析与我们的过程有相似之处。用我们现在的术语说，波莱尔过程能够被描述如下：

无论对于纯策略来说，还是对于混合策略来说，最大最小值问题（对于玩家 1 来说是最大，对于玩家 2 来说是最小）的解总是确定的。这两者是一回事，即这一变形是严格决定的。以这种方式获得的良策非常类似于图 46 中的良策。相应地，“诈叫”的特征则不像我们的图 40 和图 45 中描述得那么清楚。见上面的类比分析。——219，①

所有这些为研究具有较长交替叫牌和争叫过程的实际扑克提供了富有启发性的见解。这一问题的确困难，但也不是不可求解，我们将在其他著作中对其进行进一步研究。

第 5 章　三人零和博弈

20. 准备性研究

20.1　一般观点

20.1.1　我们已经建立起二人零和博弈理论。根据 220
12.4 中的描述，我们的下一个任务是建立三人零和博弈理论，这将给我们带来一个全新的视野。到目前为止，我们已经讨论过的博弈都有其自身的典型问题。我们看到，一人零和博弈能够被描述为一个最大值问题；二人零和博弈的特征是两个人之间的利益对立，不再能够被描述为一个最大值问题。就像从一人博弈到二人零和博弈的转变使问题不再是纯粹的最大值问题那样，从二人零和博弈到三人零和博弈则使问题不再是单纯的利益对立问题。

20.1.2　事实上，在一个三人零和博弈中，两位玩家之间的关系能够多种多样。在一个二人零和博弈中，一个人的得必定是另一个人的失，所以，存在着绝对的利益对

立。在一个三人零和博弈中，某一玩家的一个具体动作可能对另外两位玩家都不利，但也可能有利于其中的一个而不利于另外一个。[①] 因此，某些玩家会偶尔有共同利益，从而，可以想像，我们需要一个更精细的理论来区别这种利益一致是整体性的，还是局部性的。另一方面，由于这一博弈是零和博弈，利益对立必定存在，因此这一理论还必须对付可能出现的复杂情况。

尤其是，有可能发生，一位玩家可以在多种措施中选择其中的一个，这样，他能够调整他的行为，使自己与另外一位玩家的利益一致或对立；他也能够选择他希望与哪一位玩家建立这种一致利益，以及（有可能）在多大程度上建立这种共同利益。

221 **20.1.3** 一旦一位玩家有可能选择有共同利益的合作者，博弈就变成了选择一个联盟。可以预料，当联盟形成时，其中两位玩家之间的某种协议将是必要的。我们也可以这么说：共同利益使得合作成了需要的事情，从而有可能导致其中的两位玩家达成一致。另一方面，利益对立只不过要求已经做出这一选择的玩家独立地按照自己的利益行事。

二人零和博弈中丝毫没有合作的可能。两位玩家之间，一个不输，另一个就不可能赢，根本没有达成协议的

① 当然，所有这些都服从我们在二人零和博弈中已经认识到并加以解决了的那些复杂性和困难：一个具体动作是否有利于某一玩家不仅依赖于这一动作本身，还可能依赖于其他玩家做什么。然而，我们希望首先把新的困难分离出来，并且在其纯粹形式上分析它们。然后，我们再讨论它们与原来有的困难之间的关联。——220，①

基础。[1] 这是最基本的常识。如果需要一个正式的证明，这一证明就存在于我们能够完成二人零和博弈理论而从未提到过玩家之间的协议。

20.2 联盟

20.2.1 我们已经认识到，三人零和博弈有一个不同于二人零和博弈的特征。这一特征是否惟一呢？这是一个有待回答的问题。如果我们能够不引入新的概念而完成三人零和博弈理论的建立，那么，我们就能够说，它是惟一的。当我们前进到 23.1 时，情况基本上就是这样。现在，我们看到，这是这一情况中的一个主要新因素，而且我们要首先充分讨论它。

我们要集中讨论的是，在一位玩家与其他玩家的合作或对立中，他有哪些选择？也就是说，我们要分析的是结成联盟的可能性。哪两位玩家将结成联盟？哪位玩家是这一联盟的敌人？[2]

---

① 当然，在一个一般的二人博弈（即可变和博弈）中，情况就不是这样：在这种情况下，两位玩家可以通过合作生产出更大的收益。因此，一般二人博弈与三人零和博弈之间有一定的相似之处。

我们将在第 11 章，尤其是 56.2.2 中看到，其背后是一个一般关系：一般 n 人博弈密切联系着 $(n+1)$ 人零和博弈。——221，①

② 值得注意的是，当博弈中的人数达到三时，联盟首先出现在一个零和博弈之中。在一个二人博弈中，没有足够的人数：一个联盟至少吸收两位玩家，然后就找不到联盟的敌手了。不过，虽然三人博弈本身意味着联盟，人数仍太少，以至于这些联盟受到特定的约束：一个联盟只能有两个成员，而且它恰好是针对剩下的那位成员的。

如果有四位或五位玩家，那么，情况会大不相同，有可能形成若干个联盟，而且这些联盟有可能合并或相互为敌。有些这类例子将出现在 36.1.2 末尾以及 37.1.2 等；另外一个被提到的现象将出现在 8.3.2。——221，②

222 所以，我们希望构造一个三人零和博弈的例子，在这个例子中，这个方面是最为突出的和惟一有意义的事情，也是所有玩家能够想像到的惟一目标。①

20.2.2 这里，我们还需提到如下环境因素：一位玩家最多能够在两个联盟中做出选择，因为除了他本人之外只剩下两位玩家，他可以吸引他们中的任何一位合作来对付第三位玩家。我们将通过对三人博弈的研究弄明白这一选择是如何做出的，是否每一位玩家都有这类选择机会。然而，如果一位玩家建立联盟（无论我们最终如何解释这一操作）的可能性是惟一的，那么，我们并不清楚从什么意义上说存在一个联盟：按照规则要求，以一种惟一的方式作用于一位玩家的动作从本质上说更多地属于单方面策略，而不是合作性的联盟。当然，在当前阶段，这些分析也是相当含糊和不确定的。我们现在将其提出来，原因是这些区别将是关键。

至少在目前这一阶段，同样不确定的是，一位玩家面对的结盟机会如何联系着另一位玩家面对的结盟机会。事实上，一位玩家是否有若干选择机会也意味着另一位玩家是否有多种选择机会。

① 从方法论上说，这如同二人零和博弈中的“硬币配对”分析。我们在14.7.1中认识到，二人零和博弈的新的关键特征是决定哪位玩家“发现”其对手。“硬币配对”是这样一种游戏，其中“发现对手”完全主导一切，惟此是重要的事情。——222，①

21. 三人简单多数博弈

21.1　博弈描述

21.1　接下来,我们描述上面提到的例子:在一个简单的三人零和博弈中,玩家之间达成协议——即联盟——的可能性是惟一值得考虑的重要事情。

这一博弈是:

通过一个个人动作,每位玩家选择另外两位玩家之一的号码。① 每个人在不知道其他两位玩家的选择的情况下做出自己的选择。

此后,以如下方式进行支付:如果两位玩家相互选择了对方的号码,那么,我们说他们结成了一个"对"(a couple)。② 显然,只可能出现一个"对",或者干脆一个 223
也没有。③④ 如果恰好出现一个对,那么,结成"对"的两位

① 玩家 1 选择 2 或 3,玩家 2 选择 1 或 3,玩家 3 选择 1 或 2。——222,②

② 我们将会看到,一个"对"的形成符合创立它的玩家的利益。因此,我们接下来关于协议和结盟的讨论将要证明的是,玩家为了"结对"而加人一个联盟。一个"对"与一个联盟之间的区别是不应该被忽视的:一个对是该博弈的规则中出现的一个形式概念;一个联盟则是属于有关这一博弈(和很多其他博弈)的理论的一个概念。——222,③

③ 也就是说,不可能同时存在两个不同的"对"。事实上,由于只有三位玩家,两个"对"必定有一位共同玩家,这位玩家选择的号码必定同时是另外两位玩家之一的号码,即这两个"对"是相同的。——223,①

④ 有可能根本不出现"对":例如,玩家 1 选择 2,玩家 2 选择 3,玩家 3 选择 1。——223,②

玩家每人得半个单位，而（被排除在外的）第三位玩家损失一个单位。如果没有结成“对”，那么，不发生得失。[①]

读者将不难看出，这类博弈是现实中的社会过程的一个高度形式化的描述。我们将其称为（三人）简单多数博弈（simple majority game）。

21.2 博弈分析："协议"的必要性

21.2.1 让我们努力理解这一博弈中存在的情况。

首先，对于每位玩家来说，在这一博弈中，除了寻找一个伙伴——一个准备与他结成“对”的玩家之外，再也没有别的重要事情。这一博弈是如此简单，绝对消除了其他策略的可能性，以至不存在其他合理过程的余地。由于每位玩家都是在不知道其他玩家的动作的情况下做出自己的个人动作，博弈进程中不存在玩家之间的合作。希望合作的两位玩家必须在博弈开始之前，即在博弈之外达成协议。正在做出其个人动作的、通过选择同伴的号码来兑现自己的诺言的玩家必须相信，他的同伴也会这么做。如上所述，一旦我们关心的只是博弈规则，那么，我们就不再有资格判断这一信任的基础到底是什么。换句话说，有某种事情使这一协议变得“神圣”吗？也许存在着这样的博弈，像6.1和10.1中那样定义博弈规则，这些博弈本身提供了协议的达成和

---

① 为了保持绝对形式上的正确，这应该按照第2章第6节和第7节那样的方式安排。就像第191页脚注①中讨论的相似情况那样，我们将其留给读者。——223，③

履行机制。[1] 但是，我们无法把我们的分析建立在这些可能性的基础上，因为一个博弈不一定要提供这一机制；上面描述的简单多数博弈就肯定不提供这一机制。因此，我们只能认为协议是在博弈之外达成的。如果我们不允许它们出现，那么，我们就很难看出简单多数博弈中主导一位玩家行为的动机到底是什么。或者，换一种方式说：

我们要讨论的是，在一个给定的博弈中，参与者的理性行为。关于简单多数博弈的分析，我们已经前进到了这样一个点，超越这个点，没有"协议"、"谅解"等辅助概念，我们就很难描述这样的理论。后面，我们将找机会研究，去掉这些概念要求什么样的理论结构。为此，本书中的整个理论将是必要的基础，我们的研究将沿着第12章，尤其是第66节中指出的方向继续下去。然而，我们现在还不具备这样的实力，我们的理论还没有达到允许这种"忘乎所以"的程度。因此，在下面的讨论中，我们将利用在博弈之外建立联盟的可能性。这将包括签约各方尊重契约这一假设。 224

21.2.2　这些协议与桥牌之类的游戏中的"惯例"有一定相似之处——然而，一个基本的差别是，桥牌中受到影响的是一个"组织"（即性格分裂为两个"人"的一个玩家），我们在这里面对的是两位玩家之间的关系。此刻，请

① 为一位玩家提供一个个人动作，关于这个动作，其他两位玩家中只有一位知道，而且，这个动作中（可能有条件地）包含着第一位玩家的未来政策说明；还有，指示他以后遵守这些说明，或向其保证如不遵守这些说明将会受到惩罚。——223，④

读者回头阅读一下6.4.2最后一部分和6.4.3,尤其是第53页脚注②。

21.2.3 如果我们的理论被当作同一类博弈的一长串实际博弈的统计分析来使用,而不是被当作一局孤立的实际博弈的分析来使用,那么,这暗示着一种新的解释。我们应该认为,协议和其他形式的合作是这样一长串博弈的结果。

如果一位玩家希望保存自己的记录并能够依赖其伙伴的记录,那么,我们就有可能得出一个有强制力的履约机制。然而,我们更倾向于认为,我们的理论只运用于一次博弈。不过,这些考虑毕竟是有意义的,这种情况类似于二人零和博弈混合策略分析中遇到的情况。读者应该把17.3的讨论(经适当修改)运用于当前情况。

21.3 博弈分析:联盟和对称性的作用

21.3 一旦我们承认简单多数博弈中玩家之间可以有协议,问题就简单了。这一博弈给合作的玩家一个绝对可靠的获胜机会,而且该博弈不给任何人采取任何其他理性行为的机会。这一法则是如此基本,应该是充分可信的。

再有,这一博弈关于三位玩家完全对称。这是由该博弈的规则决定的:该博弈的规则不给任何玩家提供不同于其他玩家的机会。在这些可能范围之内,玩家们具体做的
225 事情自然是另一回事。他们的行为可以是不对称的;事实上,由于协议即联盟肯定会产生,不对称将是必然的。在

这三位玩家之间，只有一个联盟形成，另一位玩家必然被留在这一联盟之外。有启发意义的是，这个博弈的规则是绝对公平（对称）的，但是玩家的行为却必然是不对称的。①②

因此，这一博弈的惟一有显著意义的策略特征是两位玩家结成联盟的可能性。③ 由于该博弈的规则是完全对称的，三个可能的联盟④必须被认为有相同的基础。如果一个联盟得以形成，那么，博弈规则保证，结盟的两位玩家从（被排斥在联盟之外的）第三位玩家那里得到一单位收益——每人各半个单位。

这三个可能的联盟中的哪一个将会形成？这一问题

---

① 我们在 17.1.1 中看到，二人零和博弈中不存在这样的事情。在那里，如果博弈规则是对称的，每位玩家都得到相同数额（即该博弈的值是零），并且具有相同的良策。也就是说，没有理由预计他们会有不同的行为或最终结果。

当玩家多于两个时，联盟出现了，并且由此产生了玩家之间的“压榨”，造成了上述奇特情况。（在我们目前的三位玩家的情况中，“压榨”归因于每一个联盟仅由两位玩家组成，小于玩家总数，大于玩家的半数。然而，由此假设玩家个数更大情况下不存在“压榨”则是错误的。）——225，①

② 这当然是最常见的社会组织的一个基本特征。在对这些组织的批判中，这也是一个一再出现的论调，针对的主要是以“放任自由”为基础的理论上的社会秩序。这一观点是，绝对的形式上的公平——博弈规则的对称性——并不能保证参与者使用这些规则会产生公平和对称的结果。事实上，这一“无保证”是一个不完全的陈述：可以预料的是，任何详尽的理性行为理论将表明，参与者被迫以不对称的方式结成联盟。

就有关这些联盟的严格理论的发展程度而言，这一经典批判的确得到了理解。值得强调的是，这一典型“社会”现象只有在三个或更多参与者的情况下才会出现。——225，②

③ 在这个博弈中，这样一个联盟自然是相互选择对方的号码的简单协议，以结成一个“对”。这种情况是我们在 4.3.2 开头就已经预见到的。——225，③

④ 玩家 1，2；1，3；2，3 之间的联盟。——225，④

超出了我们的理论范围，至少就其目前发展水平来说是这样（见4.3.2末尾）。我们只能够说，根本没有联盟形成的情况是不合理的，但是，具体哪一个联盟形成则依赖于其他条件。

22. 更多例子

22.1 不对称分配：补偿的必要性

22.1.1 在上一节中，我们详细分析了简单多数博弈问题。接下来，我们必须逐一去掉描述这一博弈的特殊假设：为了在纯粹的和孤立的形式上考察联盟的作
226 用，关于这一博弈的一些特殊假设是必要的。现在，这个任务已经完成，我们必须改变我们的思路以适应更加一般的情况。

22.1.2 我们首先要去掉的一个特殊假设是：在简单多数博弈中，任何联盟能够从对手那里得到一单位收益，而且，博弈规则保证这一单位必须在两个同伙之间平分。下面，让我们考虑这样一个博弈，其中每一个联盟给出相同总收益，但是，博弈规则假设一个不同的分配。为简单起见，我们假设这个联盟是玩家1、2之间的联盟，其中玩家1得到的收益多一些，假设这个多出的数额是ε。所以，修改后的博弈规则是：

新博弈中的动作与21.1中描述的简单多数博弈相同。一个“对”的定义也相同。如果玩家1、2结成一个

“对”，那么，玩家 1 得到的数额是 $\frac{1}{2}+\varepsilon$ ①，玩家 2 得到的数额是 $\frac{1}{2}-\varepsilon$，玩家 3 损失 1 单位。如果任何其他的“对”形成（如玩家 2、3 结成“对”），那么，结成“对”的两位玩家每人得到半个单位，而被排斥在外的玩家损失一个单位。

这一博弈中会发生什么事情呢?

首先，其特征仍然对应着可能出现的三个联盟，它们对应着可能的三个“对”。表面上看，玩家 1 有一种优势，因为至少在其与玩家 2 的结“队”中得到的收益比最初的简单多数博弈中的收益多 ε。

然而，这一优势其实是一种错觉。如果玩家 1 真的坚持在其与玩家 2 的结“队”中多获得 ε，那么，这会产生如下后果：玩家 1、3 永远不会结“队”，因为从玩家 1 的角度看，1、2 结“队”更好；1、2 结“队”也不会形成，因为从玩家 2 的角度看，2、3 结“队”更好；但是，2、3 结“队”是没有任何障碍的，原因在于它能够使玩家 2、3 的联盟而形成，玩家 2、3 无需考虑玩家 1 和他的特殊愿望。因此，2 和 3 将会结“队”，而且其他的“对”都是不可能的。玩家 1 不但不能得到 $\frac{1}{2}+\varepsilon$，甚至也不能得到 $\frac{1}{2}$，他肯定是那位将被排斥在外的玩家，并且损失 1 个单位。

因此，玩家 1 保持其在“对”1、2 中的优越地位的努力必定给他带来灾难。他能够做的事情是采取措施使“对”

① 一个自然的假设是 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$。——226，①

1、2 与"对"2、3 对于玩家 2 来说有同样的吸引力。也就是说，如果他聪明的话，他将在与玩家 2 结"对"时把额外收益 ε 归还给他的同伙。请注意，他不能保留 ε 中的任何部分，即如果他试图保留一个额外的部分 ε'，[①]那么，只须用 ε' 替换 ε，上述分析就可以一字不漏地重复。[②]

227 **22.1.3** 我们也可以尝试最初的简单多数博弈的其他变形，其中每一个联盟的总值仍然是一个单位。例如，我们能够考虑这样的规则，其中玩家 1 在 1、2 结"队"和 1、3 结"队"中都得到 $\frac{1}{2}+\varepsilon$，而玩家 2 和 3 在 2、3 结"队"中平分。在这种情况下，如果玩家 1 要保有额外收益 ε 或其中的一部分，那么，玩家 2 和 3 都不会考虑与玩家 1 合作。所以，玩家 1 的任何这类企图都肯定导致 2、3 结成联盟并使自己损失一个单位。

另一种可能结果是，两位玩家在其与第三位玩家的结队中都有优势：例如，在 1、3 结队和 2、3 结队中，玩家 1 和 2 分别得到 $\frac{1}{2}+\varepsilon$，玩家 3 得到 $\frac{1}{2}-\varepsilon$；在 1、2 结队中，两位玩家各得半个单位。在这种情况下，玩家 1 和 2 结队会损失利益，玩家 3 将变成玩家 1 和 2 渴望的伙伴。预料之中的事情是，存在着与其进行合作的竞争。这必定最终导致把额外收益 ε 退还给玩家 3。只有这样才会使 1、2 结队重新具有竞争力，并恢复均衡状态。

---

① 当然有 $0<\varepsilon'<\varepsilon$。——226，②

② 导致玩家 1 的最终灾难——对 2，3 的形成——的动机是变弱了，但灾难是相同的，且与原来一样是肯定的。见第 228 页脚注①。——226，③

22.1.4 我们把有关其他变形的分析留给读者，其中，三位玩家在所有三种结队中的待遇都不相同。还有，我们不想把上述分析继续深入下去，尽管这是能够做到的，而且是回击某些反对意见所需要的。我们满足于证明我们当前的方法的某种一般性，这概括为：一位玩家在一个确定的联盟中能够得到什么，不仅取决于规则如何保证这一收益的实现，还取决于他本人和其他玩家的其他结盟机会。由于博弈规则是绝对不可违背的，这意味着，在某些条件下，盟员之间的补偿是必须的。也就是说，一位玩家不得不向其未来盟友支付一个明确的价格。具体补偿数额依赖于每位玩家所面对的选择机会。

我们的上述例子首先用于说明这些原理。这些原理得到理解之后，我们将重新回到这个题目，将其推广，并以更严格的方式进行研究。①

22.2 不同力量的联盟

22.2.1 按照计划，我们要把上面的分析进行推广。我们分析这样一个博弈，其中：

如果玩家 1、2 合作，那么，他们从玩家 3 那里得到的最大数额是 c；如果玩家 1、3 合作，那么，他们能够从玩家 2 那里得到的最大数额是 b；如果玩家 2、3 合作，那么，他

---

① 这就是为什么我们不必分析更多有启发意义的论点——下面将进行全面的考虑。

所有这些可能性是 4.3.2 和 4.3.3 开头就预料到的。——227，①

们从玩家 1 那里得到的最大数额是 a。

228 我们还没有对这一博弈的规则做出特殊假设。因此，我们没有必要描述上述数额按照什么步骤——什么样的复杂顺序——来获得。我们也不用说明这些数额如何在玩家之间进行分配，以及玩家是否能够和如何能够影响或改变这一分配等。

我们能够对这一博弈进行充分的讨论。不过，千万不要忘记，一个联盟很有可能联系着玩家之间的补偿，理由如下：

22.2.2 考虑玩家 1 的处境：他能够进入两个可供选择的联盟：与玩家 2 结盟或与玩家 3 结盟。我们假设他试图在各种条件下保有一个最低数额 x。在这种情况下，与玩家 1 结盟的玩家 2 得到的数额不会超过 $c-x$。类似，与玩家 1 结盟的玩家 3 得到的数额不会超过 $b-x$。现在，如果这两个上界的和——即 $(c-x)+(b-x)$——小于玩家 2、3 结盟能够得到的数额，那么，我们就可以有把握地说，玩家 1 将无法找到伙伴。[①] 玩家 2 和 3 的结盟能够得到的收益是 a。这样，我们看到：如果玩家 1 想在任何条件下都至少得到数额 x，那么，当 x 满足

$$(c-x)+(b-x)<a$$

时，他不可能找到结盟伙伴。

也就是说，除非

$$(c-x)+(b-x)\geq a$$

① 当然，我们假设一个玩家对任何微小利益差异都在乎。这个假设也隐含在我们关于二人零和博弈的讨论之中。——228，①

否则，玩家 1 的想法就是不现实的和愚蠢的。

上述不等式也可以写成

$$x \leqq \frac{-a+b+c}{2}$$

我们将其重述为：

(22:1:a)　　玩家 1 无法无条件地合理要求其收益超过 $\alpha = \frac{-a+b+c}{2}$。

我们也可以就玩家 2、3 重述上面的结果，所以

(22:1:b)　　玩家 2 无法无条件地合理要求其收益超过 $\beta = \frac{a-b+c}{2}$。

(22:1:c)　　玩家 3 无法无条件地合理要求其收益超过 $\gamma = \frac{a+b-c}{2}$。

22.2.3　准则(22:1:a)—(22:1:c)只是必要条件， 229
我们可以想像这样一种情况，其中，进一步的分析能够进一步降低上界值 α, β, γ，或者对玩家所追求的目标做出进一步限制。正如下面的简单分析所表明的那样，事情并非如此。

我们可以立即验证

$$\alpha+\beta=c, \quad \alpha+\gamma=b, \quad \beta+\gamma=a。$$

换句话说：如果玩家 1、2、3 并不想得到比(22:1:a)、(22:1:b)和(22:1:c)允许的数额 α、β、γ 更多的收益，那么，任何两位结成"对"的玩家都能够得到这些数额。因此，这些要求充分得到满足。当然，只有两位玩家——结成联盟的两位玩家——能够真正得到他们的"正当权

益”。被排除在联盟之外的玩家得到的不是α、β、γ，而是$-a$、$-b$、$-c$。[①]

22.3 一个不等式

22.3.1 这里，一个明显的问题是：任何一位玩家1、2、3都能够成功进入一个联盟并分别得到α、β、γ。如果他没有成功，那么，他得到的是$-a$、$-b$、$-c$。只有当α、β、γ比相应的$-a$、$-b$、$-c$大时，这才是有意义的，不然的话，一个玩家根本就不愿意进入一个联盟，他会发现进入一个联盟还不如独自行动呢。所以，问题是以下三个差是否都$\geqq 0$：

$$p=\alpha-(-a)=\alpha+a,$$
$$q=\beta-(-b)=\beta+b,$$
$$r=\gamma-(-c)=\gamma+c。$$

很明显，它们之间是相等的。事实上：

$$p=q=r=\frac{a+b+c}{2}。$$

我们记这个数量为$\Delta/2$，那么，我们的问题是，是否

$$\Delta=a+b+c\geqq 0。$$

这一不等式能够被证明如下：

22.3.2 玩家1、2的联盟能够从玩家3那里获得的最大数额是c。如果玩家1独自行动，那么，他也能够阻止玩家2、3给自己带来比$-a$更坏的结果，即便玩家2、3结

① 这些正是其他玩家联盟能够从玩家1、2、3手中掠夺的数额。该联盟无法掠夺更多。——229，①

盟，他们能够从玩家 1 处获得的最大数额也不过是 $+a$；也就是说，玩家 1 能够在没有外来帮助的情况下至少得到数额 $-a$。类似地，玩家 2 能够在没有外来帮助的情况下至少得到数额 $-b$。所以，即使没有成功合作，玩家 1、2 也能够得到数额 $-(a+b)$。由于在任何条件下他们合起来能 230
够得到的最大数额是 c，这意味着 $c \geqq -a-b$，即 $\Delta = a+b+c \geqq 0$。

22.3.3 这一证明暗示着如下说明：

首先：我们是基于玩家 1 进行论述。由于结果 $\Delta = a+b+c \geqq 0$ 关于三位玩家的对称性，如果我们分析玩家 2 和玩家 3 的类似处境，那么，我们会得出相同的不等式。这意味着，三位玩家的角色有着一定的对称性。

第二：$\Delta = 0$ 意味着 $c = -a-b$ 或刚好有 $\alpha = -a$，以及通过轮换三位玩家相应得到的一对方程。所以，在这种情况下，不存在联盟的理由：任何两位玩家，无论是否充分合作，能够得到数额是相同的（例如，对于玩家 1、2 来说，这一数额是 $-a-b=c$）。还有，总的来看，对于每位玩家来说，成功结盟也不比他独自行动得到的收益更多。（例如，对于玩家 1 来说，这一数额是 $\alpha = -a$。）

另一方面，如果 $\Delta > 0$，那么，每位玩家都在结盟中有确定利益。其中包含的利益对于三位玩家来说都是 $\Delta/2$。

这里，这一情形对于所有三位玩家的某些方面的对称性再次表明：$\Delta/2$ 是寻求联盟的诱因。对于所有三位玩家来说，这是相同的。

22.3.4 我们的结果能够用下表表达：

玩家		1	2	3
一局博弈的值	有联盟	α	β	γ
	没有联盟	$-a$	$-b$	$-c$

图 49

如果我们令

$$a' = -a + \frac{1}{3}\Delta = \alpha - \frac{1}{6}\Delta = \frac{-2a+b+c}{3},$$

$$b' = -b + \frac{1}{3}\Delta = \beta - \frac{1}{6}\Delta = \frac{a-2b+c}{3},$$

$$c' = -c + \frac{1}{3}\Delta = \gamma - \frac{1}{6}\Delta = \frac{a+b-2c}{3},$$

那么，我们有

$$a' + b' + c' = 0,$$

而且，我们能够把上面的表等价地表达为

(22:A) 玩家 1、2、3 分别有基本值 a'、b'、c'。
231 (这是一个可能的值，因为这些值的和是零，见上。)然而，这一博弈肯定有着形成一个联盟的倾向。结盟的两位玩家各得到一个(超过其基本值的)大小为 $\Delta/6$ 的奖励，被排除在联盟之外的玩家将损失 $-\Delta/3$。

因此，对于每位玩家来说，联盟的诱惑力是 $\Delta/2$，而且总有 $\Delta/2 \geq 0$。

23. 一般情况

23.1　详尽讨论:非本质博弈和本质博弈

23.1.1　接下来,我们要去掉所有限制。

令 Γ 是一个完全任意的三人零和博弈。简单的分析就足以将其引入 22.2、22.3 的分析所达到的程度。我们论述如下:

如果两位玩家如 1、2 决定完全合作,暂时推迟分配问题——即这两位玩家之间的补偿问题——的解决,那么,Γ 就变成了一个二人零和博弈。在这个新的博弈中,两位玩家是:玩家 1、2 结成的联盟(它现在是一个复合玩家,由两个"自然人"组成)和玩家 3。这样,Γ 符合第 3 章的二人零和博弈理论。这一博弈的每一局有一个确定的值(我们指 17.4.2 中定义的 v′)。用 c 记对于 1、2 联盟(它是新博弈的玩家之一)来说该博弈的一局的值。

类似地,我们能够假设玩家 1、3 之间的一个绝对联盟并视 Γ 为一个二人零和博弈,其两个玩家分别是 1、3 联盟和玩家 2。我们用 b 记对于 1、3 联盟来说这一新的博弈的一局的值。

最后,我们能够假设 2、3 之间的一个绝对联盟,并视 Γ 为一个二人零和博弈,其两个玩家分别是 2、3 联盟和玩家 1。我们用 a 记对于 2、3 联盟来说该博弈的一局的值。

应该理解,我们并没有假设这样的联盟一定要出现。

数量 a,b,c 只不过是算法上的定义。我们将其建立在了 17.6 的主要（数学）定理之上。（a,b,c 的明确表达式见后。）

23.1.2 显然，三人零和博弈 Γ 完全落入了 22.2、22.3 的成立范围之内：玩家 1,2、1,3 或 2,3 的一个联盟最多能够分别从被排斥的玩家 3、2、1 手中得到的收益额是 c、b、a。所以，22.2 和 22.3 的所有结果都成立，尤其是关于每一位玩家在有联盟和没有联盟时的处境描述。

23.1.3 这些结果表明，三人零和博弈分两类，分别对应着 $\Delta=0$ 和 $\Delta>0$。事实上：

$\Delta=0$：我们已经看到，在这种情况下，联盟没有出现的理由，每一位玩家结盟与否得到的收益是相同的。在这
232 种情况下，也只有在这种情况下，我们才能假设对于每一位玩家来说这一博弈的一局有惟一的值，而且这些值的和等于零。这些值正是 22.3 末尾提到的基本值 a', b', c'。在这种情况下，22.3 中的公式表明，$a'=\alpha=-a$，$b'=\beta=-b$，$c'=\gamma=-c$。在这种情况下，联盟不是本质性的。我们称这种情况下的博弈为*非本质博弈*。

$\Delta>0$：在这种情况下，正如我们在 22.3 末尾讨论的那样，建立联盟肯定是有诱惑力的。没有必要重复那里的讨论，我们只需提到，$\alpha>a'>-a$，$\beta>b'>-b$，$\gamma>c'>-c$。在这种情况下，联盟是本质性的。我们称这样一个博弈为*本质博弈*。

目前，上述分类只适用于三人零和博弈。不过，我们将在后面看到，它能够被推广到所有博弈，而且这是一个十分重要的分类。

23.2 完全公式化描述

23.2 在给出进一步的结果之前，让我们就数量 a、b、c 和 α、β、γ、a'、b'、c'、Δ 做几点纯数学说明，我们的解要用这些数量来表达。

假设有 11.2.3 的一个正规型三人零和博弈 Γ。三位玩家 1、2、3 分别选择变量 τ_1、τ_2、τ_3（其中每一位玩家都不知道其他两位玩家的选择）并分别得到数额 $H_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$、$H_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ 和 $H_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$。由于这一博弈是一个零和博弈，故

$$H_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3)+H_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3)+H_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\equiv 0。$$

这些变量的值域是：

$$\tau_1=1,2,\cdots,\beta_1,$$
$$\tau_2=1,2,\cdots,\beta_2,$$
$$\tau_3=1,2,\cdots,\beta_3。$$

在玩家 1、2 的绝对联盟与玩家 3 之间的博弈中，我们面对的情况是：

复合玩家 1，2 有变量 τ_1,τ_2；玩家 3 有变量 τ_3。前者得到数额

$$H_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3)+H_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\equiv -H_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3),$$

后者得到这一数额的负数。

复合玩家(1,2)的一个混合策略是属于 $S_{\beta_1\beta_2}$ 一个向量 $\vec{\xi}$，其分量记为 ξ_{τ_1,τ_2}。[①] 因此，$S_{\beta_1\beta_2}$ 中的向量 $\vec{\xi}$ 由下面的公

---

① 数对 τ_1,τ_2 的个数是 $\beta_1\beta_2$。——232，①

式描述

$$\xi_{\tau_1,\tau_2} \geqq 0, \quad \sum_{\tau_1,\tau_2} \xi_{\tau_1,\tau_2} = 1。$$

233 玩家 3 的一个混合策略是 S_{β_3} 中的一个向量 $\vec{\eta}$,其分量记为 η_{τ_3}。S_{β_3} 中的向量 $\vec{\eta}$ 由下面的公式描述:

$$\eta_{\tau_3} \geqq 0, \quad \sum_{\tau_3} \eta_{\tau_3} = 1。$$

从而,17.4.1 中(17:2)的双线性型 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是

$$K(\vec{\xi},\vec{\eta}) \equiv \sum_{\tau_1,\tau_2,\tau_3} \{H_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3) + H_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\} \xi_{\tau_1,\tau_2}\eta_{\tau_3}$$

$$\equiv - \sum_{\tau_1,\tau_2,\tau_3} H_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\xi_{\tau_1,\tau_2}\eta_{\tau_3},$$

并最终有

$$c = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}} \mathrm{Min}_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}} \mathrm{Max}_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi},\vec{\eta})。$$

在上述表达式中,玩家 1、2、3 的置换给出 b 和 a 的表达式。

我们把 α、β、γ、a'、b'、c'和 Δ 的表达式重述如下:

$$\Delta = a + b + c \text{ 必然} \geqq 0,$$

$$\alpha = \frac{-a+b+c}{2}, \quad a' = \frac{-2a+b+c}{3},$$

$$\beta = \frac{a-b+c}{2}, \quad b' = \frac{a-2b+c}{3},$$

$$\gamma = \frac{a+b-c}{2}, \quad c' = \frac{a+b-2c}{3},$$

而且,我们有

$$\Delta \geqq 0,$$

$$a' + b' + c' = 0,$$

$$\alpha = a' + \frac{\Delta}{6}, \quad \beta = b' + \frac{\Delta}{6}, \quad \gamma = c' + \frac{\Delta}{6},$$

$$-a=a'-\frac{\Delta}{3},\quad -b=b'-\frac{\Delta}{3},\quad -c=c'-\frac{\Delta}{3}。$$

24. 关于一个反对意见的讨论

24.1 完美信息及其意义

24.1.1 我们已经得到了三人零和博弈的一个解，其中考虑到了各种可能情况，而且为 n 人博弈研究指出了方向：分析所有可能的联盟以及这些联盟之间的竞争关系，这些关系决定着结盟的玩家之间的相互补偿。

我们已经注意到，当玩家个数 $n \geqq 4$ 时，这一问题的困难程度要比 $n=3$ 时大得多（见第 221 页脚注②）。

在向这一问题发起进攻之前，我们要暂时停下来检讨一下我们的实力。在下面的讨论中，我们的重点是联盟的形成和联盟成员之间的补偿，用二人零和博弈理论确定相互对立的最终联盟的值（见 25.1.1，25.2）。但是，问题的这一方面真的如我们提议的那样具有一般性吗？ 234

在关于三人零和博弈的讨论中，我们已经列举了一些有利于它的例证。我们以此为基础建立 n 人零和博弈理论的能力将是一个有力的证据。但是，有一个反对意见很值得考虑，它联系到有完美信息的博弈。

我们将要讨论的这一反对意见仅仅适用于上面提到的特殊类型的博弈。因此，即便它是成立的，它也不能向

我们提供另一种适用于所有博弈的理论。但是,由于我们宣称我们的观点具有一般性,我们就必须反驳所有的反对意见,哪怕是上述仅仅适用于某些特殊情况的反对意见。①

24.1.2 具有完美信息的博弈已经在第15节中得到论述。我们在那里看到,它们有着重要的特性,而且只有在扩展型——不仅仅是我们论述它们时所依赖的正规型——下进行分析,这些性质才能够被充分理解(见14.8)。

第15节的分析是从n人博弈开始的,但是,在其后面的部分中,我们不得不退缩到二人零和博弈范围之内。尤其在最后,我们发现了一个对其进行口头讨论的方法(见15.8),这一方法有如下突出特点:首先,它是值得考虑的,尽管不是无可挑剔的。第二,其中的论述不同于我们解决一般二人零和博弈时的论述。虽然它仅仅适用于这一特殊情况,却比其他论述更直接。第三,对于有着完美信息的二人零和博弈来说,它给出的结果与我们的一般理论结果相同。

你也许试图就$n \geq 3$的情况使用这一论述方法。事实上,对15.8.2进行粗浅的审查,我们并不能直接说明,为什么它应该被限制于$n=2$的情况(见15.8.3)。但是,这一过程并不涉及联盟或玩家之间的协议等,因此,如果它对$n=3$的情况是有用的,那么,我们目前的方法就很值得

① 换句话说:在声明一个理论的一般性时,我们必须准备给所有反对者提供证明。——234,①

怀疑了。① 因此，我们将证明，为什么在玩家个数是三或 235
更多时，15.8 的方法是不全面的。

为此，让我们重述刚刚提到的论述的一些典型步骤（见 15.8.2，并保留那里的符号）。

24.2 详细讨论：三个或更多个玩家之间补偿的必要性

24.2.1 假设博弈 Γ 是一个有着完美信息的博弈。令 $M_1, M_2, \cdots, M_\nu$ 是其动作，$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\nu$ 是与这些动作联系着的选择，$\pi(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\nu)$ 是由这些选择描述的一局博弈，$J_j[\pi(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\nu)]$ 是对于玩家 $j(j = 1, \cdots, n)$ 来说这一博弈的一局的结果。

假设动作 $M_1, \cdots, M_{\nu-1}$ 已经完成，它们的选择的结果是 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{\nu-1}$。让我们考虑最后一个动作和它的 σ_ν。如果这是一个机会动作，即 $k(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{\nu-1}) = 0$，那么，各可能值 $\sigma_\nu = 1, 2, \cdots, \alpha_\nu(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{\nu-1})$ 分别具有概率 $p_\nu(1), p_\nu(2), \cdots, p_\nu[\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{\nu-1})]$。如果这是玩家

---

① 我们也许把解决这一问题的希望寄托于，证明对于所有具有完美信息的三人零和博弈来说，$\Delta = 0$。这会使联盟成为不必要的东西。见 23.1。

就像具有完美信息的博弈借助严格决定性避开了二人零和博弈理论的困难那样（见 15.6.1），我们将借助博弈的非本质性来避开三人零和博弈的理论困难。

然而，情况并非如此。要明白这一点，只须对简单多数博弈的规则（见 21.1）做如下修改：令玩家 1、2、3 按这一顺序做出他们的个人动作（即选择他们的 τ_1、τ_2、τ_3，见上），每一位玩家被告知上一动作的情况。不难验证，三个联盟 1，2、1，3、2，3 的值 c、b、a 与以前相同

$$c = b = a = 1, \quad \Delta = a + b + c = 3 > 0。$$

尤其考虑到 21.2，这一博弈的详细讨论是有一定意义的，不过我们不想在此深入下去。——234，②

k 的一个个人动作,即 $k(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})=k=1,2,\cdots,n$,那么,玩家 k 将选择 σ_ν 使得 $J_k[\pi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)]$ 取最大值。记这个 σ_ν 为 $\sigma_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})$。因此,我们可以认为,对于玩家 $j=1,\cdots,n$ 来说,当动作 $M_1,\cdots,M_{\nu-1}$ 完成之后(且在 M_ν 之前),该博弈的值是已知的。也就是说,它只是 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1}$ 的一个函数。事实上,根据上面的分析,当 $k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})=0$ 时,

$$J_j'[\pi'(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})]$$
$$=\sum_{\sigma_\nu=1}^{\alpha_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})} p_\nu(\sigma_\nu)J_j[\pi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)];$$

当 $k_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})=k=1,\cdots,n$ 时,

$$J_j'[\pi'(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})]$$
$$=J_j[\pi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1}),\sigma_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})],$$

其中,$\sigma_\nu=\sigma_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})$ 使 $J_k[\pi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)]$ 最大化。

所以,我们能够把 Γ 看作仅由动作 $M_1,\cdots,M_{\nu-1}$ 组成,没有动作 M_ν。

借助这一方法,我们消除了最后一个动作 M_ν。重复这一做法,我们能够类似地逐步消除 $M_{\nu-1},M_{\nu-2},\cdots,M_2,M_1$,并最终得到(对于每一玩家 $j=1,\cdots,n$ 来说)这一博弈的一个确定的值。

24.2.2 为了对这一方法进行认真评价,考虑任意两个动作,$M_{\nu-1},M_\nu$,并假设它们是玩家 1 和 2 两个不同玩家
236 的个人动作。在这种情况下,我们已经假设玩家 2 将肯定选择 σ_ν 使 $J_2(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)$ 最大。这给出一个 $\sigma_\nu=\sigma_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})$。接下来,我们还假设了玩家 1 在选

择 $\sigma_{\nu-1}$ 时能够将其作为依据，即他也许可以安全地把 $J_1(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)$ 替换为 $J_1[\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})]$，并将后者最大化。但是，他能够依据这一假设吗？

首先，$\sigma_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})$ 可能不是惟一地确定的；对于给定的 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1}$，$J_2(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)$ 也许在若干个 σ_ν 值取得其最大值。在 $J_1=-J_2$ 的二人零和博弈中，这是无关紧要的，因此具有相同 J_2 值的两个 σ_ν 值也将给出相同的 J_1 值。[①] 但是，在三人零和博弈中，J_2 甚至不决定 J_1，原因在于存在着第三位玩家及其 J_3！因此，这里第一次出现了这样的事情，对于一位玩家来说无所谓的差异，对于另一位玩家可能有显著意义。在一个二人零和博弈中，这是不可能的，那里一位玩家赢得的数额恰好等于另一玩家输掉的数额。

如果两个 σ_ν 对于玩家 2 来说具有同样的重要性，而对于玩家 1 来说具有不同的重要性，那么，将会发生什么事情呢？你必定会说，他将试图引诱玩家 2 选择有利于自己的 σ_ν。他能够收买玩家 2，支出的数额等于这给他带来的差异。

承认这一点，你必定会想像着玩家 1 甚至会试图引诱玩家 2 选择一个不使 $J_2(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1},\sigma_\nu)$ 最大的 σ_ν。只要这一变化给玩家 2 造成的损失小于给玩家 1 带来的

---

① 其实，我们在 15.8.2 中根本不提 J_2：我们不谈最大化 J_2，而只谈 J_1 的最大化。甚至没有必要引入 $\sigma_\nu(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{\nu-1})$，所有的事情都由有关 J_1 的最大值和最小值运算来说明。——236，①

收益[1],那么,玩家1就能够补偿玩家2的损失,且有可能放弃其一部分利润。

24.2.3 但是,如果玩家1能够向玩家2提供这些,那么,他也必定会考虑到玩家3向玩家2提供的类似条件。也就是说,根本无法肯定玩家2将选择 σ_ν 使 $J_2(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu)$ 最大化。在两个 σ_ν 的比较中,你必须考虑玩家2的损失是否被玩家1或玩家3的收益充分补偿,因为这能够导致协议和补偿。也就是说,你必须分析联盟1,2或联盟2,3是否因 σ_ν 的改变而受益。

24.2.4 这使得联盟重新成了关注的焦点。较仔细的分析会把我们引向22.2、22.3和第23节的详细分析和结果。不过,我们似乎没有必要在这里详细给出这些:总
237 之,这是一种特殊情况,22.2、22.3和第23节中的分析(对于三人零和博弈来说)具有绝对的一般性,其条件是允许考虑到协议和补偿,即联盟。

我们想要证明的是,当我们超越二人零和博弈时,在15.8.3中得到承认的15.8.2中的论证的缺陷变得具有破坏性,而且它恰恰导致本章开始时预见到的联盟机制等。根据上述分析,这应该是清楚的,从而我们能够回到我们最初对付三人零和博弈的方法,即声称22.2、22.3和第23节的结果的充分一般性。

---

① 即以玩家3的损失为代价。——236,②

第 6 章　一般理论的描述：n 人零和博弈

25. 特征函数

25.1　动机和定义

25.1.1　下面，我们讨论一般 n 人零和博弈。第 5 章中关于 $n=3$ 情况的讨论告诉我们，在我们即将建立的理论中，玩家之间结成联盟的可能情况起着重要作用。因此，用一种数学工具定量地描述这些“可能情况”是一件非常重要的事情。 238

关于二人零和博弈，我们有（一次博弈）的“值”的严格概念，而且，如果这一组玩家是所有其他玩家结成的联盟的对手，那么，我们也能够赋予这一组玩家一个“值”。下面，我们将对这些富有启发性的分析进行严格讨论。更重要的是，我们将得到一个数学概念，以这个概念为基础，我们将建立起一个一般理论，并最终证明这种尝试是成功的。

接下来，让我们给出实现上述计划的严格数学定义。

25.1.2 假设我们有一个 n 人博弈，为简单起见，n 位玩家记为 $1,2,\cdots,n$。为了方便，我们引入这些玩家所组成的集合 $I=(1,2,\cdots,n)$。在没有关于该博弈的一局博弈进程的任何猜测或假设的情况下，我们看到的是：如果我们把玩家分为两组，并把每一组看作一个绝对联盟——即我们假设每一组内部充分合作，那么，我们就构造了一个二人零和博弈。[①] 严格说：令 S 是 I 的任意给定的子集，$-S$ 是其在 I 中的补集。我们考虑一个二人零和博弈，其中 k 属于 S 的所有玩家之间充分合作，另一方面，k 属于 $-S$ 的所有玩家之间也充分合作。

如此一来，Γ 落入了第 3 章的二人零和博弈理论。这一博弈的每一局博弈都有一个明确界定的值（指 17.8.1 中的 v′）。用 v(S) 记一局博弈对于 k 属于 S 的玩家结成的联盟（按我们现在的说法，该联盟是一位玩家）来说的值。

239 下面，我们给出 v(S) 的数学表达式。[②]

25.1.3 假设 n 人零和博弈 Γ 有 11.2.3 的正规型。其中，每一位玩家 $k=1,2,\cdots,n$ 选择一个变量 τ_k（每一位玩家都不知道其余 $n-1$ 位玩家的选择）并得到数额

$$H_k(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)。$$

由于该博弈是一个零和博弈，故

$$(25{:}1)\qquad \sum_{k=1}^{n} H_k(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)\equiv 0。$$

---

① 这正是 23.1.1 中我们对 $n=3$ 的情况做过的事情。24.1 开头已经预示了这一一般做法。——238,①

② 这是 23.2 的结构的重复，它只适用于 $n=3$ 这一特殊情况。——239,①

这些变量的定义域是：

$$\tau_k = 1, \cdots, \beta_k, \quad k = 1, \cdots, n。$$

在这个二人博弈中，博弈的一方是 k 属于 S 的玩家结成的一个绝对联盟（玩家 1′），另一方是 k 属于 $-S$ 的玩家结成的一个绝对联盟（玩家 2′）。我们面对的情况是：

复合玩家 1′的变量是 τ_k 的综合，其中 k 取遍 S 中的所有元素。我们有必要将这一综合看作一个变量并将其记为 τ^S。复合玩家 2′的变量是 τ_k 的综合，其中 k 取遍 $-S$ 中的所有元素。这个综合也是一个变量，我们将其记为 τ^{-S}。玩家 1′得到的数额是

$$(25:2) \qquad \overline{H}(\tau^S, \tau^{-S}) = \sum_{k\text{属于}S} H_k(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n) = -\sum_{k\text{属于}-S} H_k(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n);$$ ①

玩家 2′得到上述数额的负数。

玩家 1′的一个混合策略是属于 S_β^S 的一个向量 $\vec{\xi}$ ②，我们将其分量记为 ξ_τ^S。因此，S_β^S 中的 $\vec{\xi}$ 的特征是

$$\xi_\tau^S \geqq 0, \qquad \sum_{\tau^S} \xi_\tau^S = 1。$$

玩家 2′的一个混合策略是 S_β^{-S} ③中的一个向量 $\vec{\eta}$，其

---

① 第一个表达式的 τ^S, τ^{-S} 合起来形成另外两个表达式的 $\tau_1, \cdots, \tau_n$ 的综合，因此 τ^S, τ^{-S} 决定那些 $\tau_1, \cdots, \tau_n$。

后两个表达式的相等不过是零和这一性质的重述。——239，②

② β^S 是可能的综合 τ^S 的个数，它等于 k 取遍 S 中的所有元素的所有 β_k 的乘积。——239，③

③ β^{-S} 是可能的综合 τ^{-S} 的个数，它等于 k 取遍 $-S$ 中的所有元素的所有 β_k 的乘积。——239，④

分量记为 η_τ^{-S}。因此，S_β^{-S} 中的 $\vec{\eta}$ 的特征是

$$\eta_\tau^{-S} \geqq 0, \quad \sum_{\tau^{-S}} \eta_\tau^{-S} = 1。$$

240 所以，17.4.1 中(17:2)的双线性型 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 是

$$K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \sum_{\tau^S,\tau^{-S}} \overline{H}(\tau^S,\tau^{-S})\xi_\tau^S\eta_\tau^{-S},$$

并最终有

$$v(S) = \mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\,\mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\, K(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \mathrm{Min}_{\vec{\eta}}\,\mathrm{Max}_{\vec{\xi}}\, K(\vec{\xi},\vec{\eta})。$$

25.2 v(S)概念的讨论

25.2.1 上述函数 v(S)是对 I 的所有子集定义的，并且取实数值。因此，从 13.1.3 的意义上说，它是一个数值集合函数。我们将其称为博弈 Γ 的特征值函数。正如我们一再指出的那样，我们希望把整个 n 人零和博弈理论建立在这一函数之上。

让我们分析这一说法可能都涉及的内容。我们希望仅仅用特征函数 v(S)来确定与玩家联盟有关的所有事情：每一个联盟内部玩家之间的补偿、联盟之间的合并或斗争等。乍一看，这一计划似乎是行不通的，尤其考虑到如下两个事实：

(a) 用于定义 v(S)是一个纯粹虚构的二人博弈，仅仅通过理论上的结构联系到实际 n 人博弈，因此，v(S)所依据的是理论情况，而不严格是 n 人博弈本身。

(b) v(S)仅仅描述了一个特定的玩家联盟(具体为集合 S)能够从其对手(集合 −S)那里得到什么，而没有描述联盟的成果如何在 k 属于 S 的玩家中间分配。事实上，

这个分配直接取决于个人函数 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$，其中 k 属于 S，但是，v(S)则较少依赖于这些个人函数。事实上，v(S)只是由它们中的一部分以及 $\overline{H}(\tau^S,\tau^{-S})$ 惟一地决定的，甚至是由更少的东西决定的，因为它是以 $\overline{H}(\tau^S,\tau^{-S})$ 为基础的双线性型 $K(\vec{\xi},\vec{\eta})$ 的鞍点值(见 25.1.3 的公式)。

25.2.2 尽管如此，我们仍然希望，特征函数 v(S)能够决定一切事情，包括分配[见上面(b)]。第 5 章中关于三人零和博弈的分析表明，通过 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau)$ 进行的直接分配必然被某些"补偿"机制抵消。要使联盟得以形成，玩家之间必须做出这些相互补偿。这些"补偿"基本上取决于存在于联盟 S 的每一成员(即对于属于 S 的每一个 k)离开这一联盟并加入其他联盟 T 的可能性。(我们还必须考虑 S 中若干个成员同时离开的影响。)也就是说，v(S)在 k 属于 S 的玩家中间的分配应取决于 v(T)① 而不 241
取决于 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$。我们已经在第 5 章中就三人零和博弈证明了这一点。我们要建立的理论的一个主要目标是，就一般 n 人博弈证明相同的事情。

25.3 基本性质

25.3.1 在说明特征函数 v(S)在一般博弈理论中的重要性之前，我们首先把这一函数当作一个数学概念加以研究。我们知道，它是一个数值集合函数，对于 $I=(1,2,\cdots,n)$ 的所有子集 S 都有定义。下面，我们说明其基本

① 所有这些在很大程度上是 4.3.3 中关于"事实上起作用的"存在的说明。——241，①

性质：

(25:3:a) $\quad v(\ominus)=0,$

(25:3:b) $\quad v(-S)=-v(S),$

(25:3:c) $\quad$ 如 $S\cap T=\ominus$，那么，$v(S\cup T)\geqq v(S)+v(T)$。

首先，我们要证明，每个博弈的特征函数 v(S)都满足(25:3:a)—(25:3:c)。

25.3.2 最简单的证明是一个概念性的证明，能够不用数学公式加以完成。然而，由于我们在 25.1.3 中给出了 v(S)的严格数学公式，我们也许希望有一个严格的数学上证明——用运算 Max 和 Min 以及向量表达的形式化证明。所以，我们强调，我们的概念性证明严格等价于形式化的数学证明，而且它们之间的转换没有真正的困难。不过，由于概念性证明的基本思路更加清楚和简单，而形式化证明会包括一定数量的烦琐符号，我们倾向于前者。有兴趣的读者将会发现，把我们的概念性证明转换为形式化的证明是一个很好的练习。

25.3.3 (25:3:a)的证明：[①]联盟⊖没有成员，故它得到的数额总是零，从而 $v(\ominus)=0$。

---

① 注意，我们把空集⊖也当作一个联盟。读者应该对这一点认真思索。尽管这样做看似奇怪，这样做却是无害的，而且符合一般集合理论的精神。事实上，从技术上说，把空集从我们的考虑中去掉是一件相当麻烦的事情。

当然，这一空联盟没有动作，没有变量，没有收益，没有损失。但是，这是无关紧要的。

⊖的补集，所有玩家构成的集合 I，也将被视为一个可能的联盟。从集合论的角度看，这样做也是方便的。这一联盟也有其奇特之处，因为它没有对手。虽然它有很多成员，从而有动作和变量，它却是一个零和博弈，没有什么可影响的，也没有收益和损失。不过，这也无关紧要。——241，②

(25:3:b)的证明：v(S)和 v($-S$)源于同一(虚构的)二人零和博弈，其中，一方是联盟 S，另一方是联盟 $-S$。 242
对于这两个复合玩家来说，这一博弈的一次博弈的值分别是 v(S)和 v($-S$)。所以，v($-S$) = -v(S)。

(25:3:c)的证明：联盟 S(借助恰当的混合策略)能够从其对手那里得到的最大数额是 v(S)。类似地，联盟 T 能够从其对手手中得到的最大数额是 v(T)。因此，即便子联盟 S 和 T 未能相互合作，联盟 $S\cup T$ 能够从其对手手中得到的数额也是 v(S) + v(T)。[①] 由于任何条件下联盟 $S\cup T$ 能够从其对手手中得到的最大数额是 v($S\cup T$)，这意味着 v($S\cup T$) ≧ v(S) + v(T)。[②]

25.4 直接的数学结果

25.4.1 在进一步深入下去之前，让我们从(25:3:a)—(25:3:c)中得出一些结论。这些结论是在如下意义上得出的，它们对满足(25:3:a)—(25:3:c)的任意数值集合函数 v(S)都成立，无论它们是否是一个 n 人零和博弈 Γ 的特征函数。

(25:4)　　$$v(I) = 0。$$

---

① 注意，我们正使用条件 $S\cap T=\ominus$。假如 S 和 T 有一个共同元素，我们就不能够把联盟 $S\cup T$ 拆成两个子联盟 S 和 T。——242，①

② 这一证明近乎是22.3.2中 $a+b+c\geq 0$ 的证明的重复。你甚至可以从如下关系中推出文明单位(25:3:c)：考虑把 I 分解为三个不相交的子集 S，T，$-(S\cup T)$。把与之对应的三个联盟当作由 Γ 转变而成的一个三人零和博弈中的三个玩家。那么，v(S)，v(T)，v($S\cup T$)对应着上述 $-a$，$-b$，$-c$。所以，$a+b+c\geq 0$ 意味着 $-v(S)-v(T)+v(S\cup T)\geq 0$，即 $v(S\cup T)\geq v(S)+v(T)$。——242，②

证明：[①] 由(25:3:a)，(25:3:b)，$v(I)=v(-\ominus)=-v(\ominus)=0$。

(25:5)　　如果 $S_1,\cdots,S_p$ 是 I 的两两不相交子集，那么

$$v(S_1\cup\cdots\cup S_p)\geqq v(S_1)+\cdots+v(S_p)。$$

证明：这是(25:3:c)的重复运用。

(25:6)　　如果 $S_1,\cdots,S_p$ 是 I 的一个分解，即它们是 I 的两两不相交子集且其和是 I，那么，

$$v(S_1)+\cdots+v(S_p)\leqq 0。$$

证明：我们有 $S_1\cup\cdots\cup S_p=I$，由(25:4)，$v(S_1\cup\cdots\cup S_p)=0$。所以，(25:5)给出(25:6)。

25.4.2　虽然(25:4)—(25:6)是(25:3:a)—(25:3:c)的结果，但它们能够完全等价地取代(25:3:a)—(25:3:c)：

(25:A)　　惟有 $p=1,2,3$ 时，条件(25:3:a)—(25:3:c)等价于结论(25:6)；不过，当 $p=1,2$ 时，(25:6)必定有一个 = 号，当 $p=3$ 时，有一个 ≦ 号。

243 证明：$p=2$ 时，有一个 = 号的(25:6)是说 $v(S)+v(-S)=0$(我们把 S 记为 S_1，把 $-S$ 记为 S_2)；即 $v(-S)=-v(S)$，这正是(25:3:b)。

对于 $p=1$，有一个 = 号的(25:6)意味着 $v(I)=0$(在这种情况下，S_1 必定是 I)，这正是(25:4)。根据(25:3:b)，这也正是(25:3:a)。[见上面(25:4)的证明。]

$p=3$ 时，有一个 ≦ 号的(25:6)是说，$v(S)+v(T)+$

---

① 对于源于一个博弈的一个 $v(S)$，从概念上说，(25:3:a)和(25:4)都包含在第 241 页脚注②的说明之中了。——242，③

$\mathrm{v}[-(S\cup T)]\leqq 0$[我们把 S,T 记为 S_1,S_2，所以 S_3 是 $-(S\cup T)$]，即

$$-\mathrm{v}[-(S\cup T)]\geqq \mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T)。$$

由(25:3:b)，这成了 $\mathrm{v}(S\cup T)\geqq \mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(T)$，这正是(25:3:c)。

故，我们的结论完全等价于(25:3:a)—(25:3:c)的联合。

26. 用一个给定的特征函数构造一个博弈

26.1 博弈的构造

26.1.1 接下来，我们要证明 25.3.1 的逆命题：对于满足(25:3:a)—(25:3:c)的任意数值集合函数 $\mathrm{v}(S)$ 来说，存在一个 n 人零和博弈 Γ，$\mathrm{v}(S)$ 是 Γ 的特征函数。

为了避免混淆，我们用 $\mathrm{v}_0(S)$ 记满足(25:3:a)—(25:3:c)的数值集合函数。我们将用它来定义一个 n 人零和博弈 Γ，并用 $\mathrm{v}(S)$ 记 Γ 的特征函数。然后，我们必须证明 $\mathrm{v}(S)\equiv \mathrm{v}_0(S)$。

给定一个满足(25:3:a)—(25:3:c)的数值集合函数 $\mathrm{v}_0(S)$。我们定义一个 n 人零和博弈 Γ 如下：[1]

每一玩家 $k=1,2,\cdots,n$ 通过一个个人动作选择 I 的一个子集 S_k，这里 I 包含着 k。每一个玩家独立于其他玩

① 从本质上来说，博弈 Γ 是 21.1 中定义的三人简单多数博弈的更一般意义上的对应物。下文中我们将给出若干脚注详细说明这一对应物。

家做出自己的选择。①

然后,支付按如下方式进行:

对任一给定的玩家集合 S,如果

(26:1) 对每一个属于 S 的 k,总有 $S_k=S$,

我们称 S 是一个环(ring)。②③ 有一个共同元素的两个环

244 必定相等。④ 换句话说:在一次博弈中形成的全部环是 I 的一个两两不相交子集系。

没有被包含在这些环之一的每一玩家自己形成一个(一元)集,称单人集。因此,在一个博弈中实际形成的所有的环和单人集是 I 的一个分解,即 I 的一个两两不相交且并集是 I 的子集系。用 $C_1,\cdots,C_p$ 记这些集合,它们的元素个数分别记为 $n_1,\cdots,n_p$。

考虑一个玩家 k,他属于集合 $C_1,\cdots,C_p$ 中的某一个,如 C_q。那么,玩家 k 得到的数额是

---

① n 元集合 I 有 2^{n-1} 个包含 k 的子集 S,记为 $t_k(S)=1,2,\cdots,2^{n-1}$。如果我们让第 k 个玩家选择的不是 S_k,而是其指数 $t_k(S_k)=1,2,\cdots,2^{n-1}$,那么,该博弈就已经是 11.2.3 的正规型了。显然,所有的 $\beta_k=2^{n-1}$。——243,①

② 这里,环(团伙)是与 21.1 中的对类似的东西。第 222 页脚注③的内容仍适用。尤其是,在该博弈中诱导联盟的建立,从而影响博弈进程的规则中,环是形式上的概念。——243,②

③ 口头上说:一个环是玩家的一个集合,其中每一玩家刚好选择了这个集合。

它与 21.1 中对的定义的相似性是显然的。区别在于形式上的便利:在 21.1中,我们为每一玩家指定他希望的那个对中的另一个元素。这里,我们期望他指出整个环。对这一区别进行进一步的分析并不困难,不过,这是不必要的。——243,③

④ 证明:令 S 和 T 是两个环,它们有一个共同元素 k。那么,根据(26:1),$S_k=S$ 且 $S_k=T$,故 $S=T$。——243,④

$$(26:2)\qquad \frac{1}{n_q}v_0(C_q)-\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{p}v_0(C_r)。$$ [1]

这就完成了博弈 Γ 的描述。接下来，我们将证明，这个 Γ 是一个 n 人零和博弈，且具有我们希望它有的特征函数 $v_0(S)$。

26.1.2　零和特征的证明：考虑这些集合之一 C_q。属于它的 n_q 个玩家中的每一个得到(26:2)中的相同数额。因此，C_q 中的所有玩家得到的总额是

$$(26:3)\qquad v_0(C_q)-\frac{n_q}{n}\sum_{r=1}^{p}v_0(C_r)。$$

为了得到全部玩家 $1,\cdots,n$ 得到的总额，我们必须把(26:3)就所有集合 C_q 加总，即就 $q=1,2,\cdots,p$ 加总。显然，这个和是

$$\sum_{q=1}^{p}v_0(C_q)-\sum_{r=1}^{p}v_0(C_r),$$

即等于零。[2]

证明：特征函数是 $v_0(S)$：记 Γ 的特征函数为 $v(S)$。(25:3:a)—(25:3:c)对 $v(S)$ 成立，因为它是一个特征函数，而且根据假设它也对 $v_0(S)$ 成立。

我们首先证明

$$(26:4)\qquad v(S)\geqq v_0(S)\qquad 对 I 的所有子集 S 成立。$$

---

① 这一博弈的进程，即选择 $S_1,\cdots,S_n$ 或第 243 页意义上的选择 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 决定 $C_1,\cdots,C_p$，并进而决定表达式(26:2)。当然，表达式(26:2)正是一般理论中的 $H_k(t_1,\cdots,t_n)$。——244，①

② 显然，$\sum_{q=1}^{p}n_q=n$。——244，②

如果 S 是一个空集，那么，根据(25:3:a)，上式两边都等于
245 零。因此，我们可以假设 S 不是空集。在这种情况下，k 属于 S 的玩家组成的联盟能够左右其 S_k 选择确保 S 是一个环。这只需 k 属于 S 的每一玩家选择他的 $S_k = S$。无论（属于 $-S$的）其他玩家做什么，S 将因此而成为集合（环或单人集）$C_1, \cdots, C_p$ 之一，如 C_q。因此，$C_q = S$ 中的每一个 k 得到数额(26:2)；所以，整个联盟 S 得到数额(26:3)。这样，我们知道，系

$$C_1, \cdots, C_p$$

是 I 的一个分解；所以，由(25:6)得 $\sum_{r=1}^{p} v_0(C_r) \leqq 0$。也就是说，表达式(26:3) $\geqq v_0(C_q) = v_0(S)$。[①] 换句话说，无论属于 $-S$ 的玩家做什么，属于联盟 S 的玩家总能够保证自己至少得到数额 $v_0(S)$。这意味着 $v(S) \geqq v_0(S)$，即(26:4)。

接下来，我们能够证明

(26:5)　　$v(S) = v_0(S)$。

把(26:4)运用于 $-S$。由于(25:3:b)，这意味着 $-v(S) \geqq -v_0(S)$，即

(26:6)　　$v(S) \leqq v_0(S)$。

(26:4)，(26:6)合起来给出(26:5)。[②]

---

① 注意，表达式(26:3)，即联盟 S 得到的总数额并不完全取决于 S 中的玩家的选择。但是，我们得到了它的一个下界 $v_0(S)$，它是由 S 中的玩家的选择决定的。——245，①

② 注意，在我们关于联盟 S 和 $-S$ 之间的这一虚拟二人博弈的良策的讨论中，我们仅仅考虑了纯策略，没有混合策略。换句话说，所有这些二人博弈都是严格决定的。

不过，对于我们正在追求的目标而言，这是无所谓的。——245，②

26.2 总结

26.2 总之：在 25.3—26.1 中，我们已经得到了所有可能的 n 人博弈 Γ 的特征函数 v(S) 的数学描述。如果我们 246
在 25.2.1 中给出的猜想的确是对的，即如果我们能够把整个博弈理论建立在 v(S) 所表达的联盟的这些共有性质之上，那么，我们关于 v(S) 的描述就揭示了该理论的严格数学基础。从而，v(S) 的描述和函数关系(25:3:a)—(25:3:c)有着基本的重要性。

因此，我们将首先对这些关系的含义和直接性质进行数学分析。我们称满足这些关系的函数为特征函数，我们甚至把这些函数本身看作特征函数而不联系到任何博弈。

27. 策略等价性：非本质博弈和本质博弈

27.1 策略等价性与简化型

27.1.1 考虑一个以 v(S) 为特征函数的 n 人零和博弈。另外，给定一个由数 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$ 组成的系。我们构造一个新的博弈 Γ'，它与 Γ 的区别仅仅在于：Γ' 与 Γ 的玩法完全相同，但是，当所有这些结束之后，玩家 k 在 Γ' 中得到的数额是他在 Γ 中本来能够得到的数额加上 α_k^0。（注意，$\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$ 是绝对常数！）因此，如果 Γ 被转换为 11.2.3 的正规型，有函数

$$H_k(\tau_1, \cdots, \tau_n),$$

那么，Γ'也处于正规型，具有函数 $H_k'(\tau_1,\cdots,\tau_n)\equiv H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)+\alpha_k^0$。显然，Γ'（与 Γ 同）是一个 n 人零和博弈，当且仅当

(27:1) $$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0=0。$$

用 v'(S) 记 Γ'的特征函数，那么，

(27:2) $$\mathrm{v}'(S)\equiv\mathrm{v}(S)+\sum_{k\text{属于}S}\alpha_k^0=0。$$①

显然，Γ 和 Γ'这两个博弈的可能策略也是完全相同的。两者的惟一区别是每次博弈后的固定支付 α_k^0。而且，这些支付是绝对固定不变的。任何玩家都无法更改它们。你也可以说，每一玩家的地位因一个固定的数额而改变了，但是，可能的策略、形成联盟的动机和可能性完全不受影响。换句话说，如果两个特征函数 v(S) 和 v'(S) 通过(27:2)相互联系着②，那么，从可能有的策略的角度看，有特征函数 v(S) 的每一博弈都充分等价于有特征函数 v'(S) 的博弈，反之亦然。即 v(S) 和 v'(S) 刻画了策略上等价的两个博弈族。在这个意义上说，v(S) 和 v'(S) 本身可以被认为是等价的。

---

① 如果我们回忆一下 v(S)，v'(S) 是如何借助联盟 S 定义的，这一关系的真实性就变得明显了。我们也容易借助 $H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$，$H_k'(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 来证明(27:2)。——246，①

② 在这些条件下，(27:1)成立且不必另作假设。事实上，根据 25.4.1 中的(25:4)，v(I) = v'(I) = 0，从而(27:2)给出

$$\sum_{k\text{属于}I}\alpha_k^0=0;$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^0=0。$$——246，②

注意，这些都独立于我们在 26.2 中的猜测，根据那里的猜测，有相同 v(S) 的博弈都有相同的策略特征。

27.1.2 变换(27:2)[我们要留意(27:2)，见上]用一个策略上充分等价的集合函数 v′(S) 替换集合函数 247
v(S)，所以，我们称这一关系为**策略等价性**。

接下来，我们讨论特征函数的策略等价性这一概念的数学性质。

我们希望从每一族策略等价的特征函数中找出一个特别简单和有代表性的 $\bar{v}(S)$。我们的想法是，给定 v(S)，这个有代表性的 $\bar{v}(S)$ 应该是容易决定的，而且只有在 v(S) 和 v′(S) 的 $\bar{v}(S)$ 和 $\bar{v}'(S)$ 相等时，v(S) 和 v′(S) 才是策略等价的。另外，我们可以试图选择有代表性的 $\bar{v}(S)$，使 v(S) 的分析更加简单。

27.1.3 当我们从特征函数 v(S) 和 v′(S) 开始时，策略等价性概念能够单独建立在(27:2)之上；因而同样也能够单独建立在(27:1)之上(见第 246 页脚注②)。然而，我们计划仅仅从一个特征函数 v(S) 开始，并研究所有可能与 v(S) 策略等价的 v′(S)。这样做是为了从中选一个有代表性的 $\bar{v}(S)$。因此，问题是，我们可以使用哪一个系 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$，即对于这些系中的哪一个，特征函数 v(S) 和特征函数 v′(S) 有着相同的含义。答案是直接的，无论是根据我们已经说过的，还是通过直接验证，条件(27:1)都是充分必要条件。①

---

① 这里的详细讨论也许显得故弄玄虚。我们这样做只是为了弄明白，当我们从两个特征函数 v(S) 和 v′(S) 开始时，(27:1) 是多余的，但当我们从一个特征函数开始时，(27:1) 是必需的。——247，①

因此，为了寻找一个有代表性的 $\bar{v}(S)$，我们有 n 个有待确定的量 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$；不过，$\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$ 满足约束条件：(27:1)。所以，我们只有 $n-1$ 个自由参数。

27.1.4 我们希望有代表性的 $\bar{v}(S)$ 满足 $n-1$ 个条件。这样，我们选择方程

(27:3) $\bar{v}[(1)] = \bar{v}[(2)] = \cdots = \bar{v}[(n)]$。①

即，我们要求每个单人联盟应该有相同的值。

我们可以把(27:2)代入(27:3)，将其与(27:1)结合起来陈述，从而给出我们对 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$ 的所有要求。这样，我们得到：

(27:1*) $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0 = 0$,

(27:2*) $v[(1)] + \alpha_1^0 = v[(2)] + \alpha_2^0 = \cdots = v[(n)] + \alpha_n^0$。

不难验证，这些方程恰好借助 $\alpha_1^0, \cdots, \alpha_n^0$ 的一个系得以求解：

248 (27:4) $\alpha_k^0 = -v[(k)] + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v[(j)]$。②

所以，我们能够说：

(27:A) 我们称一个特征函数 $\bar{v}(S)$ 是一个简化的特征函数，当且仅当它满足(27:3)。这样，

---

① 注意，这些方程的个数是 $n-1$，而不是 n。——247，②

② 证明：用 β 记(27:2*)中 n 项的联合值，那么，(27:2*)等于 $\alpha_k^0 = -v[(k)] + \beta$，公式 (27:1*)变成了

$$n\beta - \sum_{k=1}^{n} v[(k)] = 0;$$

即

$$\beta = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v[(k)]。$$ ——248，①

在策略等价中，每一个特征函数 $v(S)$ 恰好有一个 $\bar{v}(S)$。这个 $\bar{v}(S)$ 由(27:2)和(27:4)给定。我们称 $\bar{v}(S)$ 是 $v(S)$ 的简化型。

这正是我们要找的有代表性的简化特征函数。

27.2　不等式和数量 γ

27.2　我们考虑一个简化的特征函数 $\bar{v}(S)$。我们用 $-\gamma$ 记(27:3)中 n 项连结值，即

(27:5)　　$-\gamma = \bar{v}[(1)] = \bar{v}[(2)] = \cdots = \bar{v}[(n)]$。

我们能够把(27:5)表述为

(27:5*)　　对于每一个一元集 S，$\bar{v}(S) = -\gamma$。

结合 25.3.1 中的(25:3:b)，(27:5*)变成

(27:5**)　　对每一$(n-1)$一元集 S，$\bar{v}(S) = \gamma$。

我们再次强调，(27:5)、(27:5*)和(27:5**)当中的任何一个，除了定义 γ 之外，仍是(27:3)的重述，即 $\bar{v}(S)$ 的简化本质的描述。

接下来，把 25.4.1 中的(25:6)运用于单一元素集 $S_1 = (1), \cdots, S_n = (n)$（所以，$p = n$）。那么，(27:5)给出 $-n\gamma \leqq 0$，即

(27:6)　　$\gamma \geqq 0$。

然后，考虑 I 的任一子集 S。令 p 是其元素个数：$S = (k_1, \cdots, k_p)$。把 25.4.1 中的(25:5)运用于一元集 $S_1 = (k_1), \cdots, S_p = (k_p)$，那么，(27:5)给出

$$\bar{v}(S) \geqq -p\gamma。$$

将这一结果运用于一个有 $n-p$ 个元素的 $-S$，根据 25.3.1 中的(25:3:b)，上述不等式变成 249

$$-\bar{v}(S) \geqq -(n-p)\gamma, \text{即 } \bar{v}(S) \leqq (n-p)\gamma。$$

把这两个不等式结合起来给出：

(27:7)　　对于每个 p 元集 S，$-p\gamma \leqq \bar{v}(S) \leqq (n-p)\gamma$。

(27:5*)和 $\bar{v}(\ominus)=0$[即25.3.1中的(25:3:a)]还能够表述为：

(27:7*)　　对于 $p=0,1$，(27:7)中的第一个关系是一个相等关系。

(27:5**)和 $\bar{v}(I)=0$[即25.4.1中的(25:4)]能够表述为：

(27:7**)　　对于 $p=n-1,n$，(27:7)中的第二个关系是相等关系。

27.3 非本质性和本质性

27.3.1 在分析这些不等式时，我们最好根据(27:6)区别以下两种情况：

第一种情况：$\gamma=0$。这时，对所有的 S，(27:7)给出 $\bar{v}(S)=0$。这是一个完全无关紧要的情况，在这种情况下，该博弈明显地没有更多可能性。不存在任何联盟策略，没有斗争或竞争因素：因为不存在结盟的好处，每位玩家都独立行动。事实上，无论别人做什么，每位玩家能够得到的数额总是零。在一个联盟中，所有玩家合起来得到的数额也不会超过零。因此，对于每位玩家来说，该博弈一局的值总是零。

如果一个一般的特征函数 $v(S)$ 与这样一个 $\bar{v}(S)$ 策略等价，即如果其简化型是 $\bar{v}(S)\equiv 0$，那么，我们有相同的条件，只不过对于玩家 k 来说它们平移了 α_k^0。对于玩家 k

来说，有着这一特征函数 v(S) 的一个博弈 Γ 的一局的值显然是 α_i^0：无论其他玩家做什么，他总能够独自得到这一数额。联盟也全然不可能做得更好。

如果一个博弈 Γ 的特征函数 v(S) 具有这样一个简化型 $\bar{v}(S) \equiv 0$，那么，我们称这一博弈为非本质博弈。[①]

27.3.2　第二种情况：$\gamma > 0$。通过改变度量单位[②]，我们能够做到 $\gamma = 1$。[③] 这显然不影响该博弈中策略的显著方面，而且，在有些情况下，这样做会十分方便。不过，我们现在还不准备这么做。

在当前情况下，玩家毕竟有结盟的理由。被遗弃的玩家损失的数额是 γ[即得到 $-\gamma$，见(27:5*)或(27:7*)]，而进行合作的 $n-1$ 个玩家总共得到的数额是 γ[即他们 250
的联盟得到 γ，见(27:5**)或(27:7**)]。[④]

因此，一个恰当的联盟策略是十分重要的。

当一个博弈 Γ 的特征函数 v(S) 有简化型 $\bar{v}(S) \not\equiv 0$ 时，我们称 Γ 为本质博弈。[⑤]

---

① 我们将在 27.4.1 末尾看到，这与 23.1.3(在三人零和博弈)中非本质一词的含义相同。——249，①

② 指货币单位。宽泛地说，它可以是效用的单位。见 2.1.1。——249，②

③ 在 $\gamma = 0$ 的第一种情况下，这本来是不可能的。——249，③

④ 这当然不是全部内容。有可能存在着值得考虑的其他联盟，其成员个数大于 1 小于 $n-1$。(如果这样的事情发生了，那么，$n-1$ 必定大于 1，即 $n \geq 4$。)这依赖于有大于 1 但小于 $n-1$ 个元素的集合 S 的 $\bar{v}(S)$。不过，只有一个完备的和详尽的博弈理论才能正确评价这些联盟的作用。

上述孤立的玩家与 $n-1$ 个玩家联盟(没有敌手的最大联盟！)之间的比较仅仅满足我们当前的目的：证明这种情况下联盟的重要性。——250，①

⑤ 见第 249 页脚注①。——250，②

27.4 各种准则和不可加效用

27.4.1 给定一个特征函数 v(S)，我们希望其简化型 $\overline{\mathrm{v}}(S)$ 的 γ 有一个明确的表达式(见上)。

现在，$-\gamma$ 是 $\overline{\mathrm{v}}[(k)]$ 即 $\mathrm{v}[(k)]+\alpha_k^0$ 的连结值，而且，由(27:4)，这一表达式正是 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{v}[(j)]$。① 故

(27:8) $$\gamma=-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{v}[(j)]。$$

所以，我们有

(27:B) Γ 是非本质博弈的充分必要条件是，

$$\sum_{j=1}^{n}\mathrm{v}[(j)]=0 \quad (\text{即 } \gamma=0)，$$

Γ 是本质博弈的充分必要条件是，

$$\sum_{j=1}^{n}\mathrm{v}[(j)]<0 \quad (\text{即 } \gamma>0)。$$②

对于一个三人零和博弈，使用 23.1 的符号，我们有 $\mathrm{v}[(1)]=-a$，$\mathrm{v}[(2)]=-b$，$\mathrm{v}[(3)]=-c$，所以 $\gamma=\frac{1}{3}\Delta$。对于三人零和博弈来说，我们的非本质博弈和本质博弈概念具体为 23.1.3 中的那些概念。考虑到这些概念在两种情况下的解释，上述结果是预料之中的事情。

---

① 所以，$-\gamma$ 是第 248 页脚注①中的 β。——250，③

② 我们已经看到，由于 $\sum_{j=1}^{n}\mathrm{v}[(j)]\leqq 1$ 和 $\gamma\leqq 1$，情况必定是其中之一。——250，④

27.4.2 我们还能够描述其他的非本质性准则：

(27:C)　　博弈 Γ 是一个非本质博弈的充分必要条件是，对于某个适当的系 $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$，其特征函数 v($S$)能够以如下形式给定： 251

$$v(S) \equiv \sum_{k\text{属于}S} \alpha_k^0。$$

证明：事实上，根据(27:2)，这表示，v(S)与 $\bar{v}(S) \equiv 0$ 策略等价。由于这一 $\bar{v}(S)$ 是简化的，那么，它正是 v(S)的简化型，这也正是非本质性的含义。

(27:D)　　博弈 Γ 是一个非本质博弈的充分必要条件是，25.3.1 的(25:3:c)中其特征函数 v(S)总有一个等号，即

如果 $S \cap T = \ominus$，那么，$v(S \cup T) = v(S) + v(T)$。

证明：必要性：上述(27:C)给出的 v(S)显然具有这一性质。

充分性：将这一方程重复运用给出 25.4.1 的(25:5)中的等号，即，如果 $S_1,\cdots,S_p$ 是两两不相交的，那么，

$$v(S_1 \cup \cdots \cup S_p) = v(S_1) + \cdots + v(S_p)。$$

考虑随意一个 S，如 $S = (k_1,\cdots,k_p)$。那么，$S_1 = (k_1),\cdots,S_p = (k_p)$ 给出

$$v(S) = v[(k_1)] + \cdots + v[(k_p)]。$$

这样，我们有

$$v(S) = \sum_{k\text{属于}S} \alpha_k^0,$$

其中，$\alpha_1^0 = v[(1)],\cdots,v[(n)]$，而且，由(27:C)，Γ 是非本质的。

27.4.3 准则(27:C)和(27:D)都表达了,所有联盟的值都是由组成它们的成分博弈的值相加得到的。[1] 我们必须牢记的是,值是否具有可加性在经济学文献中所起的作用。大多数情况下,值不具有一般可加性,但是,它们给理论研究带来了巨大的困难;而且,我们很难说,这些困难已经真正解决了。这里,我们应该回忆有关互补性、总值、分配诸如此类概念的讨论。我们正在进入我们的理论的相应阶段。有意义的是,
252 我们只是在无意义(非本质博弈)情况中发现了可加性,而真正有意义(本质)的博弈有着不可加的特征函数。[2]

熟悉测度论的读者会进一步注意到:可加的 v(*S*),即非本质博弈,恰恰是 *I* 的测度函数,它赋予 *I* 总测度值零。因此,一般特征函数 v(*S*)是测度概念的一个新的推广。从更深层意义上说,这些说明联系着前面有关经济值的说明。然而,继续这个题目就走得太远了。[3]

27.5 本质博弈中的不等式

27.5.1 让我们回到不等式 27.2,尤其是(27:7)、

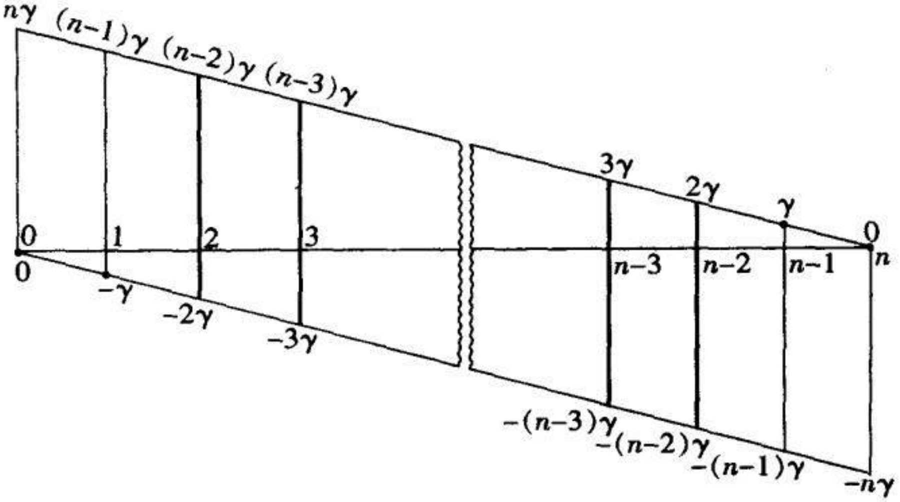
---

① 读者将会明白,我们正在使用(联盟 *S* 的)"值"一词指数量v(*S*)。——251,①

② 此刻,我们仅仅关注问题的一个特殊方面:我们正在考虑的是联盟的值,即一致行为的值,而不是经常物品和服务的值。读者将会看到,这一特殊化并不像它看似那么严重:物品和服务事实上代表着它们的交换的经济活动,即代表着一致行为。——252,①

③ 测度论还出现在另一个地方。见41.3.3。——252,②

(27:7*)和(27:7**)。对于 $\gamma=0$(非本质博弈的情况)，一切都是清楚的和不重要的。因此，我们假设 $\gamma>0$(本质博弈的情况)。



横坐标：p，S 的元素个数。$0,-\gamma,\gamma,0$ 或粗线：对于与 p 相应的 S，$\overline{v}(S)$ 的可能取值范围。

图 50

现在，对于 S 中任一元素个数 p，(27:7)、(27:7*)和(27:7**)为 $\overline{v}(S)$ 规定了可能的取值范围。对于 $p=0,1,2,\cdots,n-2,n-1,n$，该取值范围如图 50 所示。

我们能够增加如下说明：

27.5.2　第一：我们将看到，在一个本质博弈中，即当 $\gamma>0$ 时，必然 $n\geqq3$。不然的话，公式(27:7)、(27:7*)和(27:7**)——或描述其内容的图 50——相互冲突：对于 $n=1$ 或 2，一个 $n-1$ 元集合 S 有 0 个或 1 个元素，这样，253
一方面，$\overline{v}(S)$ 必须是 γ，另一方面，它必须是 0 或 $-\gamma$，这是

不可能的。[①]

第二：当一个本质博弈中参与者个数最小，即 $n=3$ 时，公式（27:7）、（27:7*）和（27:7**）或图 50 决定一切事情：它们说明 $0,1,2,\cdots,n-1,n$ 元集 S 的 $\overline{v}(S)$ 的值；而且，对于 $n=3$，所有可能的元素个数是 0，1，2，3。（见第 250 页脚注①中的说明。）这与我们在 23.1.3 中发现的事实一致，据此，仅仅存在一个本质三人零和博弈。

第三：对于更大的参与者个数，即对于 $n\geqq 4$，这一问题有新的复杂性。正如公式（27:7）、（27:7*）和（27:**）——或图 50——所表明的那样，集合 S 的元素个数 p 能够取值 $0,1,n-1,n$ 之外的值。也就是说，区间

(27:9) $$2\leqq p\leqq n-2$$

成为可能。[②] 正是在这个区间之内，上述公式不再惟一地决定 $\overline{v}(S)$ 的值。它们只为它规定如下区间

(27:7) $$-p\gamma\leqq\overline{v}(S)\leqq(n-p)\gamma,$$

对于每个 p，其长度都是 $n\gamma$（见图 50）。

27.5.3 这里，我们可以问的一个问题是，是否整个区间（27:7）都是可能的？也就是说，我们是否可能通过对 $\overline{v}(S)$ 做进一步的、更精心的分析来缩小它？答案是：不。对于 $n\geqq 4$ 的情况，我们有可能对于（27:9）中的每一

---

① 当然，在一个一人零和博弈中，什么事情都不发生，而对于一个二人零和博弈，我们有一种理论，其中不出现联盟。故，这些博弈的非本质性是情理之中的事情。——253，①

② 它有 $n-3$ 个元素；而且，只要 $n\geqq 4$，这个数就是正的。——253，②

个 p，定义惟一一个博弈 Γ_p，其中 $\bar{\mathrm{v}}(S)$ 对于合适的 p 元集 S 取值 $-p\gamma$ 和 $(n-p)\gamma$。关于这个题目，我们只在这里提一下，无需深入下去。

总之，只有当 $n \geqq 4$ 的时候，博弈理论才真正枝繁叶茂。（见第 250 页脚注①，同样的思想在那里得到了说明。）

27.6 特征函数的向量运算

27.6.1 最后，我们给出一些更为正式的说明。

25.3.1 中的条件(25:3:a)—(25:3:c)描述的是特征函数 $\mathrm{v}(S)$，有着一定的向量特征：它们允许 16.2.1 中定义的类似向量运算，纯量乘法和向量相加。更确切地说：

纯量乘法：给定一个常数 $t \geqq 0$ 和一个特征函数 $\mathrm{v}(S)$，那么，$t\mathrm{v}(S) \equiv \mathrm{u}(S)$ 也是一个特征函数。向量加法加：给定两个特征函数 $\mathrm{v}(S)$ 和 $\mathrm{w}(S)$①，那么，$\mathrm{v}(S) + \mathrm{w}(S) \equiv$ 254
$\mathrm{z}(S)$ 也是一个特征函数。与 16.2 中相应定义的惟一区别在于，我们必须要求 $t \geqq 0$。②③

---

① 这里，所有的事情都指相同的 n 和相同的玩家集合

$$I = (1, 2, \cdots, n)。\qquad ——253,③$$

② 事实上，$t<0$ 会推翻 25.3.1 中的(25:3:c)。注意，用一个 $t<0$ 乘最初的 $\mathscr{H}_k(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 完全是可以的。最简单的情况是考虑用 $t=-1$ 去乘，即符号的改变。但是，$\mathscr{H}_k(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 的符号的变化根本不对应着 $\mathrm{v}(S)$ 的符号的变化。根据常识，这应该是清楚的，因为收益和损失的颠倒会直接改变所有策略考虑。（这一颠倒及其某些后果是国际象棋玩家所熟悉的。）通过研究 25.1.3 中的定义，我们的说法可以得到证实。——254，①

③ 有着这一纯量乘法的向量空间有时被称为正向量空间。我们不必深入其系统理论。——254，②

27.6.2 上面定义的两种运算有直接的意义：

纯量乘法：如果 $t=0$，那么，$u(S)\equiv 0$，即 27.3.1 中考虑的什么也不发生的博弈。所以，我们可以假设 $t>0$。在这种情况下，我们的运算等于效用单位的改变，即用一个因子 t 与之相乘。

向量加法：这对应着与 $v(S)$ 和 $w(S)$ 相应的博弈的叠加。你可以设想相同的玩家 $1,2,\cdots,n$ 同时独立地玩这两个博弈。也就是说，规则规定，在一个博弈中做出的动作不影响另一个博弈。在这种情况下，联合博弈的特征函数显然是两个成分博弈的特征函数之和。[①]

27.6.3 我们不准备深入系统研究这些运算如何博弈的策略局面。然而，对这个题目给出一些简单说明还是有益的。

首先，我们注意，纯量乘法和向量加法的结合也能够得到直接解释。因此，特征函数

$$z(S)\equiv tv(S)+sw(S) \qquad (27:10)$$

属于这样一个博弈，这一博弈是博弈 $v(S)$ 和 $w(S)$ 的叠加，只不过在叠加之前效用单位分别用 t、s 乘之。

如果 $s=1-t$，那么(27:10)对应着 16.2.1 中(16:A:c)意义上重心的形成。

根据 35.3.4 中的讨论（尤其见第 304 页脚注①），这一看似基本的运算甚至也能够对策略产生十分直接的

① 这在直觉上应该是显然的。借助 25.1.3，一个严格证明涉及一些烦琐的符号，但没有困难。——254，③

影响。

其次，在有些情况下，我们的运算对策略没有影响。

第一种情况是，仅仅用 $t>0$ 进行纯量乘法，只不过改变效用单位，不产生上述后果。

第二种情况且较有意义的情况是，27.1 中讨论的策略等价性是一个叠加：我们通过叠加一个非本质博弈[①]从博弈 $v(S)$ 过渡到一个策略等价博弈 $v'(S)$。[见 27.1.1 中的(27:1)和(27:2)、27.3.1 以及 27.4.2 中有关非本质博弈的(27:C)。]我们也可以将这一点表达为：我们知道，一个非本质博弈是这样一个博弈，其中联盟不起作用。把这样一个博弈叠加到另一个博弈之上并不影响策略等价性，即它保留那一博弈的策略结构不变。 255

28. 群、对称性和公平

28.1 置换、置换群及其对博弈的影响

28.1.1 接下来，让我们考虑对称性的作用，或更一般地说，在一个 n 人博弈 Γ 中置换玩家 $1,2,\cdots,n$ 的后果。这当然是 17.11 中关于二人零和博弈的相应研究的扩展。

---

① 其特征函数为 $w(S)=\sum_{k属于S}\alpha_k^0$，用我们上面的符号，

$$v'(S)=v(S)+w(S)。\qquad ——255,①$$

这一分析从 $n=2$ 的情况下 17.11 中的主要步骤的重复开始。但是，与 $n=2$ 的情况相比，对于一般的 n，符号 $1,\cdots,n$ 可能的置换的个数要大得多，我们应该更为系统地进行这一工作。

考虑 n 个符号 $1,\cdots,n$。构造这些符号的任一置换 P。对任一 i，P 将其变成 $i^P(=1,\cdots,n)$。所以，我们写

(28:1) $\quad P: i \rightarrow i^P$,

或以枚举的方式表达为：

(28:2) $\quad P:\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n\\ 1^P,2^P,\cdots,n^P\end{pmatrix}$。①

在这些置换中，有一些特别值得注意：

(28:A:a) 恒等置换 I_n 使每一个 $i(=1,2,\cdots,n)$ 都保持不变：

$$i \rightarrow i^{I_n} = i。$$

(28:A:b) 给定两个置换 P、Q，它们的乘积 PQ 等于首先进行置换 P，然后进行置换 Q：

$$i \rightarrow i^{PQ} = (i^P)^Q。$$

256 所有可能的置换的个数是 n 的阶乘，

$$n! = 1 \cdot \cdots \cdot n,$$

而且，它们合起来形成一个对称置换群 $\sum_n$。$\sum_n$ 的任一满足如下两个条件的子系 G 称一个置换群：

---

① 对于 $n=2$，1、2 两个元素的对换是 $\begin{pmatrix}1,2\\2,1\end{pmatrix}$。

恒等置换（见下）是 $I_n=\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n\\1,2,\cdots,n\end{pmatrix}$。——255，②

(28:A:a*)　I_n属于G,

(28:A:b*)　如果P和Q属于G,那么,PQ属于G。[①]

一个置换P把$I=(1,\cdots,n)$的每一个子集变成另一个子集S^P。[②]

28.1.2 在这些一般准备性说明之后,我们将把其中的概念运用于任一n人博弈Γ。

我们对Γ的玩家的符号$1,2,\cdots,n$进行置换P。也就是说,用k^P而不用k记玩家$k=1,2,\cdots,n$。这把博弈Γ变换为另一个博弈Γ^P。用Γ^P替换Γ必定会带来两个方面的影响:一、影响博弈进程中每一位玩家的行为,即每位玩家选择的变量τ_k的指数k;二、影响对于每位玩家来说一局博弈的结果,即表达这一结果的函数H_k的指数k。[③] Γ^P仍然处于正规型,有函数$H_k^P(\tau_1,\cdots,\tau_n)$,$k=1,\cdots,n$。在用$H_k(\tau_1,\cdots,\tau_n)$表达$H_k^P(\tau_1,\cdots,\tau_n)$时,我们必须牢记:$\Gamma$中有$H_k$的玩家$k$现在是$\Gamma^P$中的玩家$k^P$,所以他有$H_k^P$。

---

① 关于重要而广泛的群论,请参阅马修森(L. C. Mathewson):有限群基本理论,波士顿,1930;伯恩塞德(W. Burnside):有限序群论,第二版,剑桥,1911;斯贝塞(A. Speiser):有限序群论,第三版,柏林,1937。

我们不需要任何有关群论的特殊结果或概念,而且上面给出的文献也只是为了方便希望深入这个题目的读者。

虽然我们不希望我们的论述与难以理解的群论纠缠一起,鉴于下述理由,我们还是要介绍群论的一些基本知识:不熟悉基本的群论,不可能真正理解对称性的本质和结构。通过正确使用术语,我们希望为有兴趣在这方面深入下去的读者做个准备。

对称性与群论之间关系的较全面阐述见外尔:对称性,《华盛顿科学研究杂志》,第XXVIII卷(1938),第253页。——256,①

② 如果$S=(k_1,\cdots,k_p)$,那么,$S^P=(k_1^P,\cdots,k_p^P)$。——256,②

③ 见第109页$n=2$时的类似情形。——256,③

如果我们用变量 $\tau_1, \cdots, \tau_n$ 构筑 $H_k^{P_\prime}$，那么，当 Γ^P 中指数是 k 的玩家选择 τ_k 时，我们表达博弈 Γ^P 的结果。这样，Γ 中的玩家 k 是 Γ^P 中的玩家 k^P，他选择 τ_{k^P}。所以，H_k 中的变量必定是 $\tau_{1^P}, \cdots, \tau_{n^P}$。因此，我们有

(28:3) $\qquad H_k^{P_\prime}(\tau_1, \cdots, \tau_n) \equiv H_k(\tau_{1^P}, \cdots, \tau_{n^P})$。①②

257 用 $v(S)$ 和 $v^P(S)$ 分别记 Γ 和 Γ^P 的特征函数。由于形成 Γ^P 中 S^P 的玩家与形成 Γ 中 S 的玩家是相同的，对任何 S，我们有

(28:4) $\qquad v^P(S^P) \equiv v(S)$。③

28.1.3 对于某一特殊的 P，如果 Γ 与 Γ^P 相同，那么，我们就说 Γ 是就 P 而言不变的或对称的。按照(28:3)，这表达为

---

① 读者将会看到，函数 H 本身的指标 k 的上标 P 出现在等式左端。这是正确的。而且，(28:3)前面的论述是证明这一点所必需的。

正确无误地得到这一点的重要性在于这样一个事实，不然的话，我们不能够确保上标 P 和 Q 相继应用于 Γ 与把 PQ 作为一个上标运用 Γ 给出相同结果。读者将会发现，这一点的验证是一个很好的置换运算练习。

对于 $n=2$ 和 $P=\begin{pmatrix}1,2\\2,1\end{pmatrix}$，$P$ 运用于两端有相同影响，所以不必对此详加论述。见第109页脚注①。——256，④

② 在二人零和博弈中，$H \equiv H_1 \equiv -H_2$；类似，$H^P \equiv H_1^P \equiv -H_2^P$。所以，在这种情况下$\left[\text{见上，} n=2 \text{ 和 } P=\begin{pmatrix}1,2\\2,1\end{pmatrix}\right]$，(28:3)变成了 $H^P(\tau_1, \tau_2) \equiv -H(\tau_2, \tau_1)$。这与14.6和17.11.2的公式一致。

不过，这一简化仅仅在二人零和博弈中是可能的；在其他情况下，我们必须依赖一般公式(28:3)。——256，⑤

③ 这一概念性证明较演算式证明清楚且简单。不过，后者能够以25.1.3的公式为基础，除了大量符号之外，并无太大困难。——257，①

(28:5)　　$H_k^P(\tau_1,\cdots,\tau_n) \equiv H_k(\tau_1^{\ P},\cdots,\tau_1^{\ P})$。

此种情况下，对任一 S，(28:4)变成了

(28:6)　　$\mathrm{v}(S^P) \equiv \mathrm{v}(S)$。

对任一给定的 Γ，我们能够构筑 P 的系 G_Γ，这里的 P 是这样的 P，就 P 而言 Γ 是对称的。显然，根据(28:A:a)和(28:A:b)，恒等置换 I_n 就属于 G_Γ。而且，如果 P、Q 属于 G_Γ，那么，它们的积 PQ 也属于 G_Γ。这样，根据(28:A:a*)和(28:A:b*)，G_Γ 是一个群。我们称 G_Γ 为 Γ 的**不变群**。

注意，(28:6)现在能够被表达为：

(28:7)　　$\mathrm{v}(S)=\mathrm{v}(T)$　如果 G_Γ 中存在一个 P 使 $S^P=T$，即它把 S 变成 T。

G_Γ 的大小，即其元素个数，是 Γ 的"对称程度"的一种度量。如果(除恒等置换 I_n 之外)每一个置换 P 都改变 Γ，那么，G_Γ 仅仅由 I_n 组成，Γ 是**完全不对称的**。如果没有使 Γ 改变的置换 P，那么，G_Γ 包含所有 P，即它是对称群 $\sum_n$，Γ 是**完全对称的**。当然，在两种极端情况中间存在着很多中间情况，Γ 的对称性(或缺乏对称性)的严格结构由群 G_Γ 揭示。

28.1.4(28:7)后面的条件意味着，S 和 T 有相同个数的元素。如果 G_Γ 足够小，即如果它充分不对称，那么，反过来说则未必正确。因此，考虑允许这一逆命题成立的群 258
$G=G_\Gamma$是有意义的。也就是说，在这些群中，下述命题成立：

(28:8)　　如果 S 和 T 有相同个数的元素，那么，G 中存在一个 P 使 $S^P=T$，即它把 S 变成 T。

当 G 是对称群 $\sum_n$ 时，即对于完全对称的 Γ 的 $G=G_\Gamma=\sum_n$，条件(28:8)显然得到满足。对于一些更小的群，即不

完全对称的Γ，它也得到满足。①

28.2 对称性和公平

28.2.1 无论如何，只要(28:8)就$G=G_{\Gamma}$成立，那么，我们就能够从(28:7)得到如下结论：

(28:9) v(S)仅仅取决于S中元素的个数。

也就是说：

(28:10) $\mathrm{v}(S)=\mathrm{v}_{p}$，

其中p是S中元素的个数$(p=0,1,\cdots,n)$。

---

① 对于$n=2$，除了恒等置换外，$\sum_n$只包含一个置换($p=\begin{pmatrix}1,2\\2,1\end{pmatrix}$，见前面的说明)。所以，$G=\sum_n$任何对称性的惟一可能性。

考虑$n\geqq 3$的情况。如果G满足(28:8)，我们称它是集合可递的。哪一个$G\neq\sum_n$是集合可递的？这一问题也是一个有意思的群论问题，但我们不必对其进行研究。

对群论感兴趣的读者，我们给出如下提示：

存在$\sum_n$的一个子群，它包含$\sum_n$的一半元素(即$\frac{1}{2}n!$个)，被称为交错群$\mathscr{A}_n$。这个群在群论中十分重要，且有着广泛讨论。对于$n\geqq 3$的情况，不难看出，它也是集合可递的。

所以，真正的问题是：对于$n\geqq 3$，不等于$\sum_n$的集合可递群G和$\mathscr{A}_n$真的存在吗？

不难证明，对于$n=3,4$，这样的群不存在。对于$n=4,5$，这样的群存在。(对于$n=5$，一个集合可递群G存在，它有20个元素，而$\sum_5$和$\mathscr{A}_5$分别有120和60个元素。当$n=6$时，存在一个有120个元素的集合可递群G，而$\sum_6$和$\mathscr{A}_6$分别有720和360个元素。)对于$n=7,8$，较为精妙的群论分析证明，不存在这样的群。对于$n=9$，问题尚未解决。对于$n>9$，这样的群似乎是不存在的，但这一结论并未得到证明。——258，①

考虑 25.3.1 中条件(25:3:a)—(25:3:c)，这些条件详尽描述了所有特征函数 $v(S)$。当(28:10)成立时，不难将其就 v_p 重写。它们变成：

(28:11:a)　　$v_0 = 0$,

(28:11:b)　　$v_{n-p} = -v_p$,

(28:11:c)　　$v_{p+q} \geqq v_p + v_q$,　　$p+q \leqq n$。

27.1.4 中的(27:3)显然是(28:10)[即(28:9)]的一个结果，所以，这样一个 $v(S)$ 自然是简化的，有 $\gamma = -v_1$。因此，我们尤其有 27.2 中的(27:7)、(27:7*)和(27:7**)，即图 50 中的条件。

通过一个一个与 25.4.2 中的(25:A)类似的过程，我们能够重写(28:11:c)。

令 $r = n-p-q$，那么，(28:11:b)允许我们把(28:11:c)说成： 259

(28:11:c*)　　如果 $p+q+r=n$，则 $v_p + v_q + v_r \leqq 0$。

就 p、q、r 而言，(28:11:c*)是对称的。[①] 所以，我们可以通过一个恰当的置换使 $p \leqq q \leqq r$。另外，当 $p=0$(从而 $r = n-q$)时，(28:11:c*)是(28:11:a)、(28:11:b)的结果(且有 =)。因此，我们可以假设 $p \neq 0$。这样，我们只需就 $1 \leqq p \leqq q \leqq r$ 要求(28:11:c*)，从而对(28:11:c)而言，这样做同样正确。注意，当 $r=n-p-q$ 时，不等式 $q \leqq r$ 意味着 $p+2q \leqq n$。我们将这里的分析重述之如下：

(28:12)　　只有当

① 无论是其结论，还是其假设！——259，①

$$1 \leqq p \leqq q, \quad p+2q \leqq n,$$①

条件(28:11:c)才是充分的。

28.2.2 特征函数的性质(28:10)是对称性的一个结果,但这一性质本身也是重要的。当我们在 $n=2$ 这一最简单情况中考虑它时,这一点变得十分清楚。

事实上,对于 $n=2$,(28:10)简单意味着,17.8.1 的 v′等于零。② 用 17.11.2 的术语说,这意味着,博弈 Γ 是公平的。我们把这一概念推广:当 n 人博弈 Γ 的特征函数 $v(S)$ 满足(28:9),即当它是(28:10)的一个 v_p 时,博弈 Γ 是*公平*的。现在,正如 17.11.2 的情况那样,博弈的公平这一概念包含着对称性这一概念所包含的基本内容。然而,必须牢记的一点是,博弈的公平这个概念——和与之类似的完全对称的概念——未必意味着一局博弈中的所有玩家能够期望有相同的命运(即便假设他们玩得很好)。对于 $n=2$,事情的确如此,但当 $n \geqq 3$ 时,事情就不是这样了。(关于前者,见 17.11.2;关于后者,见第 225 页脚注①和②。)

28.2.3 最后,我们注意到,根据 27.2 中的(27:7)、(27:7*)和(27:7**),或图 50,当 $n=3$ 时,所有简化博弈都是对称的,从而是公平的,而当 $n \geqq 4$ 时,这一说法不成

---

① 这些不等式取代原有的 $p+q \leqq n$。它们显然是更强的要求。因为它们意味着 $3p \leqq p+2q \leqq n$ 且 $1+2q \leqq p+2q \leqq n$,我们有

$$p \leqq \frac{n}{3}, \quad q \leqq \frac{n-1}{2}。$$——259,②

② 根据定义,$v' = v[(1)] = -v[(2)]$。对 $n=2$,与(28:10)等价的(28:9)的惟一基本结论是 $v[(1)] = v[(2)]$。根据上面的分析,这恰恰意味 $v' = -v'$,即 $v' = 0$。——259,③

立。（见 27.5.2 中的讨论。）接下来，如 27.1 中描述的那样，我们借助玩家 1，…，n 分别得到的固定额外支付 α_1，…，α_n 把没有约束的 n 人零和博弈变成其简化型。从而，一个三人零和博弈的不公平性，即其不对称性，完全由 α_1、α_2、α_3 描述。（见 22.3.4 的基本值 a'、b'、c'。）在一个 n 260
人零和博弈（$n \geq 4$）中，这不再总是可能的，因为简化型未必是公平的。也就是说，在这样一个博弈中，玩家的策略地位之间也许存在着根本的差异，这一差异是无法用 α_1，…，α_n 表达的，即无法用固定的有限支付来表达。在第 7 章的进程中，这一点将变得十分清楚。这里，回忆一下第 250 页脚注①也是有益的。

29. 三人零和博弈的重新讨论

29.1 定性讨论

29.1.1 现在，我们已经为完成我们的主要任务做好了准备：n 人零和博弈理论原理的阐述。① 我们在上一节中定义的特征函数为我们完成这一任务提供了必要的工具。

我们的方法与过去一样：我们必须选择一种特殊情况作为进一步研究的基础。这种情况是一种已经研究清楚

① 一般 n 人博弈仍有待研究，不过，我们可以借助零和博弈来解决它。最重要的一步是当前这一步：向 n 人零和博弈的过渡。——260，①

的情况，而且我们充分相信它具有一般情况的特征。通过分析这一特殊情况中已经发现的（局部）解，我们试着建立支配一般情况的原理。在4.3.3和25.2.2中的讨论告诉我们，三人零和博弈正是我们这里所说的那种特殊情况。

29.1.2 所以，让我们重新思考我们据以得到三人零和博弈的解的方法。显然，本质博弈的情况将是一种有意义的情况。我们知道，我们也可以用其简化型进行分析，而且我们还可以选择 $\gamma=1$。[①] 正如27.5.2的第二种情况中讨论的那样，在这种情况下，特征函数是完全确定的：

$$(29:1)\qquad \text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}0\\1\\2\\3\end{cases}\text{个元素时，} v(S)=\begin{cases}0\\-1\\1\\0\end{cases}\text{。}$$[②]

我们知道，在这一博弈中，一切事情都由（两个人）结成的联盟决定，而且我们的讨论[③]给出了如下主要结论：

可能的联盟有三个，且相应地这三位玩家将以如下结论结束该博弈：

---

① 见27.1.4和27.3.2。——260，②

② 用23.1.1的符号，这意味着 $a=b=c=1$。我们提到的具有一般性的讨论是22.2、22.3和23中的讨论。这样，在三人零和博弈中，我们在27.1中（关于策略等价性和简化型）的分析实际上有着这一后果：如上所述，它们把一般情况变回上述特殊情况。——260，③

③ 见22.2.2和22.2.3；但这些讨论事实上只是22.1.2和22.1.3中的讨论的详述。——260，④

玩家 / 联盟	1	2	3
(1,2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
(1,3)	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
(2,3)	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

图 51

这个"解"需要一些解释,我们尤其容易想到如下说明:[①] 261

29.1.3

(29:A:a)　上述三个分配对应着该博弈的所有可能策略。

(29:A:b)　其中的任何一个自身都不能被当作一个解;解由三者组成的系及其相互关系组成。

(29:A:c)　这三个分配合起来尤其具有一种"稳定性",它只是我们迄今为止十分粗略地提到的一种稳定性。事实上,在这三个分配之外,不可能找到其他均衡状态;因此,可以预料,玩家之间的任何类型的谈判必定最终导致这三个分配之一。

(29:A:d)　同样明显的是,这一"稳定性"只是全部三个分配合在一起时所具有的一个特

① 这些说明是对 4.3.3 中的分析的继续。关于(29:A:d),可回忆 4.6.2 后半部分的相关内容。——261,①

征。其中任何一个并不单独具有这一特征;其中每一个,就其本身而言,是能够被推翻的,假如一种新的联盟模式传播给了必要多数玩家的话。

29.1.4 关于引导我们得出图51的解的基本原理,我们寻求其严格的严格阐述,并时刻牢记上面的说明(29:A:a)—(29:A:d)。

图51应该是第260页脚注中提到的那些论述的简明总结。对图51中三个分配所具有的直觉上的"稳定性"进行更加严格的阐述,将引导我们回到我们在较早时候的定性分析中采取的观点。①

这些观点能够被陈述为:

(29:B:a) 如果任何其他分配方案供这三位玩家
262 考虑,那么,它将因如下理由而遭到拒绝:充分多的玩家②出于自己的利益至少倾向于这个解(即图51)中的分配之一,而且这些玩家相信或被说服相信③这一分配是有利的。

(29:B:b) 然而,如果这个解中的分配之一供考虑,那么,无法找到上面所说的那样一组玩家。

下面,我们更为严格地讨论这一具有启发性的原理的优点。

---

① 这些观点遍布4.4—4.6,但它们更具体地出现在4.4.1和4.6.2中。——261,②

② 在这种情况中,当然是两个。——262,①

③ 这里"相信"指4.4.3中讨论的意思。我们下面的讨论将使其更为清楚。——262,②

29.2 定量讨论

29.2.1 假设 β_1、β_2、β_3 是玩家 1、2、3 中间的一个可能的分配方法，即

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3=0。$$

由于按照定义 v[(i)](= −1)是玩家 i 能够独自(无论其他玩家做什么)得到的数额，他肯定会阻止 $\beta_i<\mathrm{v}[(i)]$ 的分配。因此，我们假设

$$\beta_i \geqq \mathrm{v}[(i)]=-1。$$

我们可以置换玩家 1、2、3，使

$$\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \beta_3。$$

假设 $\beta_2<\frac{1}{2}$，从而 $\beta_3<\frac{1}{2}$。所以，玩家 2、3 都会倾向于图 51 中[①]最后一种分配，其中，它们两人都得到 $\frac{1}{2}$ 这一较大数额。[②] 除此之外，他们显然能够得到这一分配的好处(无论第三位玩家做什么)，因为这一分配赋予他们的数额 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$ 并不超过 v[(2,3)] = 1。

---

① 由于我们为指定玩家 1、2、3 的排列，图 51 的最后一种分配实际上代表所有三者。——262，③

② 注意，这两位玩家中的每一位各自和个别地从这一变化中受益。然而，只有这两个人的总收益是不够的。例如，见图 51 中第一种分配与第二种分配的比较；作为一个整体，玩家 1、3 能够从前者向后者的变化中受益。

在这一特殊变化中，玩家 3 真正从中收益(得到 $\frac{1}{2}$ 而不是 −1)，玩家 2 则无所谓(两种情况中都得到 $\frac{1}{2}$)。不过，除非玩家 1 得到进一步补偿，他是不会采取行动的。关于这一点的较详细讨论，见本节最后一部分。——262，④

另一方面，如果 $\beta_2 \geqq \frac{1}{2}$，那么，$\beta_1 \geqq \frac{1}{2}$。由于 $\beta_3 \geqq -1$，只有当 $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}, \beta_3 = -1$，即我们有图 51 中第一种分配的情况下，这才是可能的（见上面脚注③）。

263 这证明了 29.1.4 末尾的(29:B:a)。(29:B:b)是中间情况：图 51 的三种分配的每一个之中，都肯定存在一个渴望改善自身状况的玩家①，但是，由于只存在一个这样的玩家，他无法这么做。已经结盟的两位玩家中的任何一位都不会从放弃现在的联盟并加入这个不满的玩家而得到任何好处：他们每人已经得到 $\frac{1}{2}$，而且他们不可能从图 51 中的其他分配中得到更多。②

29.2.2 通过富有启发性的精心论述，这一点可以得到进一步澄清。

我们看到，那位不满的玩家会发现，没有人愿意成为他的伙伴，而且他无法激励别人与他结盟。肯定没有人愿意在未来的联盟中做出超过 $\frac{1}{2}$ 的让步。我们能够以两种方式说明这一要约无效的理由：从纯粹形式上说，这一要约是被排除了的，因为他对应着不属于图 51 的一种分配；任何一位未来伙伴会认为，接受此类条件下的联

① 得到 -1 的那位玩家。——263，①

② 读者会发现，用一个（没有简化的）一般 $v(S)$——即用一般的 a、b、c 和 22.3.4 中的数量——重复这里的讨论是一个很好的练习。结果是相同的。它不可能是其他结果，因为我们的策略等价和简化理论是正确的（见第 260 页脚注③）。——263，②

盟是不明智的[①]，这种想法背后的真正主观动机大多是担心以后的不利。一个联盟成立之前会有进一步的谈判，其中，他也许会处于特别容易受伤害的地位（见 22.1.2 和 22.1.3）。

所以，第三位玩家无法克服的困难是，对于两位可能的伙伴来说，改变是无所谓的。我们强调：在两位可能的伙伴方面，没有理由反对向图 51 中另一个分配变化，存在着的只是并不重要的某种类型的稳定性。[②]

30. 一般定义的严格形式

30.1 定义

30.1.1 我们回到一般 n 人零和博弈 Γ 的情况。令 $\mathrm{v}(S)$ 是 Γ 的特征函数。

下面，我们给出一些关键的定义。

根据前面的讨论，一个分配指 n 个数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 组成的一个集合，它们具有如下性质：

(30:1) $\alpha_i \geqq \mathrm{v}[(i)], \quad i = 1, \cdots, n,$

(30:2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$。

---

① 不健康的或不道德的。——263，③

② 在从图 51 的一种分配向另一种分配的变化中，肯定有一位玩家反对，有一位玩家支持。所以，剩下的那位玩家利用他的影响力阻止这一变化。——263，④

264 为了方便，我们把 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 看作 16.1.2 中 n 维线性空间 L_n 中的一个向量：

$$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$$

对于分配 $\vec{\alpha}$，如果

(30:3) $\sum_{i\text{属于}S}\alpha_i\leqq \mathrm{v}(S)$。

那么，我们称集合 S（即 $I=1,\cdots,n$ 的一个子集）是这个分配的有效集。如果存在一个集合 S 满足如下条件，那么，称分配 $\vec{\alpha}$ 占优分配 $\vec{\beta}$，记为

$$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta},$$

(30:4:a) S 不是一个空集，

(30:4:b) 对于 $\vec{\alpha}$ 而言，S 是有效集，

(30:4:c) 对于属于 S 的 i，$\alpha_i>\beta_i$。

如果分配集 V 有如下性质，那么，我们称 V 是一个解：

(30:5:a) V 中不存在被 V 中 $\vec{\alpha}$ 占优的 $\vec{\beta}$，

(30:5:b) 每一个不属于 V 的 $\vec{\beta}$ 都被 V 中某一个 $\vec{\alpha}$ 占优。

(30:5:a)和(30:5:b)能够被合并为一个条件：

(30:5:c) V 中的元素严格地是这样一些分配，它们不被 V 中任何元素占优。

（见第 40 页脚注①。）

30.1.2 当然，回顾上面的讨论以及 4.4.3 中的讨论，这些定义的含义是能够理解的。

首先，我们的分配对应着上述两处同样名称的较符合直觉的概念。我们所谓的有效集不过是这样一些玩家，他

们"相信或能够使其相信"获得由 $\vec{\alpha}$ 提供的损益；见 4.4.3 和 29.1.4 中的(29:B:a)。上述占优的定义中的条件(30:4:c)表达的是，所有这些玩家都认为 $\vec{\alpha}$ 优于 $\vec{\beta}$。所以，我们完全按照 4.4.1 和 29.1.4 中(29:B:a)所描述的偏好的精神定义占优。

一个解的定义与 4.5.3 和 29.1.4 中(29:B:a)和(29:B:b)给出的定义完全一致。

30.2 讨论和简要重述

30.2.1 我们已经在前面详细说明了给出这些定义的动机。不过，我们将重新强调它们的一些主要特点，尤其关于解的概念。 *265*

我们已经在 4.6 中看到，我们关于一个博弈的解的概念完全对应着人们常说的"行为标准"的概念。我们的定义(30:5:a)和(30:5:b)对应着条件 4.5.3 中的(4:A:a)和(4:A:b)，表达的是"内部稳定性"，这是切实可行的行为标准应该具备的条件。4.6 中对此进行了进一步的定性阐述。现在，考虑到已有的讨论的严格性，我们能够重新严格描述这些概念。下面，我们给出几点说明：①

30.2.2

(30:A:a)　　考虑一个解 V。对于 V 中一个分配 $\vec{\beta}$，我们尚未排除 V 之外满足 $\vec{\alpha'} \succ \vec{\beta}$ 的一

① 下面的说明(30:A:a)—(30:A:d)是 4.6.2 中的概念的较为详细和严格的表达。(30:A:e)则是 4.6.3 中的概念的重述。——265，①

个$\overrightarrow{\alpha'}$的存在性。[1] 如果这样一个$\overrightarrow{\alpha'}$存在，这些玩家的态度必定是这样的：如果解 V（即这一分配体系）被玩家 1，…，n 接受，那么，这必定会给它们造成这样的印象，即 V 中惟有分配 $\vec{\beta}$ 是"可靠的"分配方式。不属于 V 的满足$\overrightarrow{\alpha'}\succ\vec{\beta}$ 的$\overrightarrow{\alpha'}$，纵然是一个有效集的玩家所倾向的，也不足以吸引他们，因为它是"不可靠的"。（见我们关于三人零和博弈的详细讨论，尤其是每一玩家回避接受超过一个联盟中确定的数额的理由。见 29.2 末尾。）$\overrightarrow{\alpha'}$"不可靠"的另一个理由是，V 中存在着一个 $\vec{\alpha}$ 满足 $\vec{\alpha}\succ\overrightarrow{\alpha'}$［见（30：A：b）］。从某种意义上说，所有这些论证是兜圈子，并且重新回到作为一个"行为标准"，即作为一个"可靠的"准则的 V 的选择。但是，在涉及"可靠性"的日常考虑中，此类兜圈子却是司空见惯的事情。

266 （30：A：b） 如果玩家 1，…，n 已经接受解 V 作为一个"行为标准"，那么，为了巩固他们对 V 的忠诚，有必要借助于 V 使 V 之外的分配变得不可信。事实上，对于 V 之外的任一分配$\overrightarrow{\alpha'}$，V 中必定存在一个 $\vec{\alpha}$ 满足 $\vec{\alpha}\succ\overrightarrow{\alpha'}$。

---

① 事实上，我们将在 31.2.3 的（31：M）中看到，永远不满足$\overrightarrow{\alpha'}\succ\vec{\beta}$ 的一个分配 $\vec{\beta}$ 只能存在于非本质博弈之中。——265，②

[这是我们的假设(30:5:b)。]

(30:A:c)　最后，V 中必须没有内部矛盾，即对 V 中 $\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$，永远不会 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。[这是我们的另一个假设(30:5:a)。]

(30:A:d)　注意，如果占优即关系 $\succ$ 具有可递性，那么，条件(30:A:b)和(30:A:c)[即我们的假设(30:5:a)和(30:5:b)]就会排除(30:A:a)中较为棘手的情况。尤其是：在(30:A:a)的情况下，$\vec{\beta}$ 属于 V，$\vec{\alpha'}$ 不属于 V，且 $\vec{\alpha'} \succ \vec{\beta}$。由(30:A:b)，V 中存在一个 $\vec{\alpha}$，使得 $\vec{\alpha'} \succ \vec{\alpha}$。现在，如果占优关系具有可递性，我们就能够得出 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 的结论，这与(30:A:c)矛盾，因为 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 都属于 V。

(30:A:e)　上述分析进一步明确了，只有整个 V 才是一个解，并且具有某种稳定性，即 V 的个别元素不配是一个解。(30:A:a)中强调的兜圈子也使得同一博弈可以有若干个解变得明显了。也就是说，对于同一现实情况，可能存在着多个稳定的行为标准。它们中的每一个自然是稳定的且具有自身一致性，但它们之间是相互冲突的。(见 4.6.3 末尾和 4.7 末尾。)

在后面很多讨论中，我们将看到，解的这一多样性的确是一个十分一般的现象。

30.3 饱和的概念

30.3.1 我们借机在这里插入一些更加形式化的说明。迄今为止，我们主要关注的是我们已经引入的一些概念的含义以及我们引入这些概念的动机，但是，正如上面定义的那样，解的概念却具有一些值得注意的形式特征。

下面给出的形式——逻辑——上的分析并没有直接的用途，我们不准备在此耗费大量篇幅，只是沿着前面的思路给出进一步介绍。不过，我们认为，这些说明有助于更全面理解我们的理论框架。另外，这里的方法将在51.1—51.4中全然不同的联系中有一个重要技术应用。

267 **30.3.2** 考虑元素 x、y 的一个值域（集合）D，x 与 y 之间存在着关系 $x\mathscr{R}y$。D 的这两个元素 x、y 之间的关系 $\mathscr{R}$ 成立表达为公式 $x\mathscr{R}y$。① $\mathscr{R}$ 的定义是，明确指明使 $x\mathscr{R}y$ 成立的 x、y 和使 $x\mathscr{R}y$ 不成立的 x、y。如果 $x\mathscr{R}y$ 等价于 $y\mathscr{R}x$，那么，我们称 $x\mathscr{R}y$ 是*对称的*。对任一关系 $\mathscr{R}$，我们总能够定义一个新的关系 $\mathscr{R}^s$，$x\mathscr{R}^sy$ 意味着 $x\mathscr{R}y$ 与 $y\mathscr{R}x$ 的合取。显然，$\mathscr{R}^s$ 是 $\mathscr{R}$ 的对称型。②

我们定义：

(30:B:a) D 的一个子集 A 是 $\mathscr{R}$ *满足的*，当且仅当，对于 A 中所有 x、y，$x\mathscr{R}y$ 成立。

---

① 有时，一个更方便的表达方式是 $\mathscr{R}(x,y)$，但出于我们的需要，我们倾向于 $x\mathscr{R}y$。——267，①

② 例子：令 D 由实数组成。关系 $x=y$ 和 $x\neq y$ 是对称的。关系 $x\leq y$，$x\geq y$，$x<y$，$x>y$ 都不对称。前两者的对称型是 $x=y$（$x\leq y$，$x\geq y$ 的合取），后两者的对称型是一个谬论（$x<y$ 和 $x>y$ 的合取）。——267，②

(30:B:b)　　D 的一个子集 A 与 D 的一个元素 y 是 $\mathscr{R}$ 相容的，当且仅当，对 A 中所有 x，$x\mathscr{R}y$ 成立。

这两个定义的直接结果是：

(30:C:a)　　D 的一个子集 A 是 $\mathscr{R}$ 满足的，当且仅当，与 A $\mathscr{R}$ 相容的 y 组成 A 的一个子集。

接下来，我们定义：

(30:C:b)　　D 的一个子集是 $\mathscr{R}$ 饱和的，当且仅当，与 A $\mathscr{R}$ 相容的 y 恰好组成集合 A。

因此，为了保证(30:C:b)成立，必须对(30:C:a)增加的条件是：

(30:D)　　如果 y 不属于 A，那么，它不与 A $\mathscr{R}$ 相容，即 A 中存在一个 x，使得 $x\mathscr{R}y$ 不成立。

故，$\mathscr{R}$ 饱和可以等价地用(30:B:a)和(30:D)来定义。

30.3.3 在对这些概念做进一步研究之前，我们给出一些例子。这些例子中的一些结论的验证是容易的，留给读者。

例 1：令 D 是任意一个集合，且 $x\mathscr{R}y$ 是关系 $x=y$，那么，A 的 $\mathscr{R}$ 满足性意味着，A 要么是一个空集，要么是一个一元集；A 的 $\mathscr{R}$ 饱和性意味着，A 是一个一元集。

例 2：令 D 是一个实数集，关系 $x\mathscr{R}y$ 是关系 $x \leqq y$。[1] A 的 $\mathscr{R}$ 满足性意味着上述相同事情；[2]A 的 $\mathscr{R}$ 饱和性则意味着，A 是一个一元集，由 D 的最大元素组成。因此，如果 D 没有最大元素（如所有实数组成的实数集），那么，也就

---

① 在这一关系的定义中，D 可以是任何其他集合，见 65.4.1。——267，③

② 见第 268 页脚注①。——267，④

不存在这样的 A;如果 D 有一个最大元素(如 D 是有限集时),那么,A 是惟一的。

例 3:令 D 是平面,$x\mathscr{R}y$ 表达的是,点 x,y 有着同一高度(或纵坐标)。那么,A 的 $\mathscr{R}$ 满足性意味着,A 中所有的
268 点有同一高度,即位于平行于横轴的直线上。A 的 $\mathscr{R}$ 饱和性意味着,A 恰好是一条平行于横轴的直线。

例 4:令 D 是所有分配组成的集合,$x\mathscr{R}y$ 是占优关系 $x \succ y$ 的否定。那么,我们的(30:B:a)、(30:D)与 30.1.1 中(30:5:a)、(30:5:b)的比较,或(30:C:b)与(30:5:c)的比较表明:A 的 $\mathscr{R}$ 饱和性意味着,A 是一个解。

30.3.4 只需看(30:B:a)就知道,关系 $x\mathscr{R}y$ 满足与关系 $y\mathscr{R}x$ 满足以及它们的合取 $x\mathscr{R}^{S}y$ 满足全都是一回事。换句话说:$\mathscr{R}$ 满足与 $\mathscr{R}^{S}$ 饱和是一回事。

所以,满足是一个只有以对称关系为基础才能进行研究的概念。

这是由定义(30:B:a)中 x 和 y 的对称决定的。与之等价的条件(30:C:b)则没有表现出这一对称性,不过这不会推翻证明。

现在,$\mathscr{R}$ 饱和的定义(30:C:b)十分类似于(30:C:a)的结构。它也不对称。然而,(30:C:a)有一等价的对称形式(30:B:a),但(30:C:b)就不是这样。如我们所知,与(30:C:b)相应的等价形式是(30:B:a)和(30:D)的合取,而(30:D)根本不对称。即,如用 $y\mathscr{R}x$ 替换 $x\mathscr{R}y$,那么,(30:D)会发生根本变化。所以,我们看到:

(30:E) 用 $\mathscr{R}^{S}$ 替换 $\mathscr{R}$,$\mathscr{R}$ 满足不受影响,但 $\mathscr{R}$ 饱和可能受到影响。

条件(30:B:a)(等于 $\mathscr{R}$ 满足)对于 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}^s$ 来说是一样的。由于 $\mathscr{R}^s$ 意味着 $\mathscr{R}$,就 $\mathscr{R}$ 而言的条件(30:D)意味着就 $\mathscr{R}^s$ 而言的(30:D)。所以,我们看到:

(30:F)　　$\mathscr{R}$ 饱和意味着 $\mathscr{R}^s$ 饱和。

上面提到的这两类饱和的确不同:我们不难找到一个集合,它是 $\mathscr{R}^s$ 饱和,但不是 $\mathscr{R}$ 饱和的。①

因此,有关饱和的研究就不能限于对称关系。

30.3.5　对于对称关系 $\mathscr{R}$ 而言,饱和的本质是十分简单的。为了避免不必要的复杂性,我们暂时假设 $x\mathscr{R}x$ 总是成立的。②

接下来,我们证明: 269

(30:G)　　令 $\mathscr{R}$ 是对称的。那么,A 的 $\mathscr{R}$ 饱和性等价于它是 $\mathscr{R}$ 满足的最大集合。也就是说,它等价于:A 是 $\mathscr{R}$ 满足的,但 A 的任何真超集不是 $\mathscr{R}$ 满足的。

证明:$\mathscr{R}$ 饱和性意味着 $\mathscr{R}$ 满足性[即条件(30:B:a)]且条件(30:D)。所以,我们只需证明:如果 A 是 $\mathscr{R}$ 满足的,那么,(30:D)等价于 A 的所有真超集都不是 $\mathscr{R}$ 满足的。

(30:D)的充分性:如果 $B\supset A$ 是 $\mathscr{R}$ 满足的,那么,B 中不属于 A 的任意一个 y 违背条件(30:D)。③

---

① 例:30.3.3 的例子中的前两个互为 $\mathscr{R}^s$ 和 $\mathscr{R}$(见第267页脚注②)。它们的满足是完全相同的,但它们的饱和则不同。——268,①

② 在 30.3.3 的例子中,这是显然的事情:$x\mathscr{R}y$ 是 $x\succ y$ 的否定,而 $x\succ x$ 永远不会成立。——268,②

③ 注意,至今为止,没有对 $\mathscr{R}$ 做出额外限制。——269,①

(30:D)的必要性:考虑违背(30:D)的 y。那么,

$$B = A \cup (y) \supset A。$$

现在,B 是 $\mathscr{R}$ 满足的,即对于 B 中 x'、y',总有 $x'\mathscr{R}y'$。事实上,当 x'、y'都属于 A 时,这是 A 的 $\mathscr{R}$ 满足性的结果。如果 x'、y'之一属于 A,且另一个 $=y$,那么,$\mathscr{R}$ 的对称性允许我们假设 x'属于 A,$y'=y$。这样,我们的结论与(30:D)的否定一致。

如果 $\mathscr{R}$ 不对称,我们只能说:

(30:H)　　A 的 $\mathscr{R}$ 饱和意味着它是 $\mathscr{R}$ 满足的最大集合。

证明:根据(30:E),$\mathscr{R}$ 满足的最大集合等于 $\mathscr{R}^S$ 满足的最大集合。由于 $\mathscr{R}^S$ 是对称的,由(30:G),这等于 $\mathscr{R}^S$ 满足。而且,由(30:F),这是 $\mathscr{R}$ 饱和的一个结果。

有关一个对称的 $\mathscr{R}$ 的这一结果的含义是:从任一 $\mathscr{R}$ 满足集合开始,只要有可能,这一集合必定会越来越大,直至再增加就会失去 $\mathscr{R}$ 满足性。如此,最终得到一个 $\mathscr{R}$ 满足的最大集合,即按照(30:G)一个 $\mathscr{R}$ 饱和的集合。① 这一方法不仅保证了 $\mathscr{R}$ 饱和集的存在性,而且还允许我们推断,每一 $\mathscr{R}$ 满足集合都能够被扩大到一个 $\mathscr{R}$ 饱和集。

---

① 当 D 是一个有限集时,这一穷举过程是一个基本过程,即在有限步之后就结束了。

然而,由于所有分配组成的集合通常是无穷集,无穷集 D 的情况是重要的。当 D 是无穷集时,具有启发意义的是,上述穷举过程能够无穷进行下去的情况。被称为超限归纳法的这一过程曾经是大量集合论研究的对象。它能够以一种严格的方程进行,依赖于所谓的选择公理。

有兴趣的读者将会在第 61 页脚注①中提到的奥斯多夫的著作中找到参考文献。也可参见 E. Zermelo, Beweis dass jede menge wohlgeordnet werden kann,《数学年刊》第 59 卷(1904),第 514 页和《数学年刊》第 65 卷(1908),第 107 页。

这些问题大大远离了我们的主题,且不是我们必需的。我们进一步深入下去。——269,②

应该注意的是，一个 $\mathscr{R}$ 饱和集的每一子集必然是 $\mathscr{R}$ 270
满足的。[1] 从而，上述说法意味着，逆命题也是成立的。

30.3.6 如果我们能够以这种方式证明解的存在性，那将是十分方便的。猛然看来，这是行不通的：我们使用的关系 $x\mathscr{R}y$——是占优关系 $x \succ y$ 的否定，见 30.3.3——显然是不对称的。因此，我们无法应用(30:G)，而只能应用(30:H)：最大满足性只是饱和即成为一个解的必要条件，而非充分条件。

我们能够以如下方式看这一困难的深层原因：如果能够用一对称的关系替换上面的 $\mathscr{R}$，这不仅能够用于证明解的存在性，而且在这一过程中还能够把任一 $\mathscr{R}$ 满足分配集拓展为一个解(见上)。有可能，每一个博弈都有一个解，但我们将会看到，在有些博弈中，一定的 $\mathscr{R}$ 满足集合不是任何解的子集。[2] 从而，用某种对称的东西替换 $\mathscr{R}$ 这个方式是行不通的，因为在大概是正确的第一个结论和肯定不正确的第二个结论的证明中，这同样是工具性的。[3]

读者会感到，这里的讨论是无用的，因为我们必须使用的关系 $x\mathscr{R}y$("非 $x \succ y$")事实上是不对称的。然而，从技术角度看，能够想像的是，我们可以找到具有下述性质的另一个关系 $x\mathscr{S}y$：$x\mathscr{S}y$ 不等价于 $x\mathscr{R}y$；事实上，$\mathscr{S}$ 是对称的，而 $\mathscr{R}$ 不对称，但 $\mathscr{S}$ 饱和等价于 $\mathscr{R}$ 饱和。在这种情况

---

① 显然，性质(30:B:a)并未因过渡到一个子集而丢失。——270，①

② 见第 285 页脚注②。——270，②

③ 这是一个有关数学的技术方面的一个相当有用的原理。一种方法的不适用性能够从这样一个事实中推断出来，即如果它是完全行得通的，那么，它就会给出过度证明。——270，③

下，$\mathscr{R}$ 饱和集必须存在，因为它们是 $\mathscr{S}$ 饱和集，且未必是 $\mathscr{R}$ 满足集的 $\mathscr{S}$ 满足集总能够被拓展为 $\mathscr{S}$ 饱和集，即 $\mathscr{R}$ 饱和集。[①] 用这一方案对付解的存在性问题并非来自突发的灵感。事实上，我们将在后面看到以完全相同方式解决的一个类似问题（见 51. 4. 3）。然而，所有这些暂时地还只是希望和可能性。

30. 3. 7 在上一节中，我们考虑了是否每一个 $\mathscr{R}$ 满足集都是一个 $\mathscr{R}$ 饱和集的一个子集的问题。我们注意到，对于我们必须使用的关系 $x\mathscr{R}y$（"非 $x \succ y$"）来说，这一问题的回答是否定的。我们要对这一事实做一些简要说明。

如果回答是肯定的，那么，这意味着，满足（30 : B : a）的任一集合都能够被拓展为一个同时满足（30 : B : a）和（30 : D）的集合；或用 30. 1. 1 的符号，满足（30 : 5 : a）的任一分配集都能够被拓展为同时满足（30 : 5 : a）和（30 : D）的分配集。

271 用 4. 6. 2 的术语重述上述说法是十分重要的。如此，上述说法成了：不存在内部矛盾的任一行为标准总能够被拓展为一个稳定的行为标准——即不仅不存在内部矛盾，且能够推翻它之外的所有分配。

根据 30. 3. 6 中的考察，一般来说，上述说法是不正确的。这些考察有一定显著意义：要使一个行为准则集成为一个稳定的行为标准的核（子集），它必须有更多结构性

---

① 这里的要点是，$\mathscr{R}$ 饱和与 $\mathscr{S}$ 饱和集被认为是相互等价的，但 $\mathscr{R}$ 满足性与 $\mathscr{S}$ 满足性不被认为是等价的。——270，④

质，而非仅仅不存在内部矛盾。[1]

30.4　三个直接目标

30.4.1　我们已经描述了一个不受任何约束的 n 人博弈的一个解的特征，从而，我们能够系统研究这一概念的性质。结合这一研究的早期阶段，我们首先研究三种特殊情况。这三种特殊情况是：

第一：在第 4 节的讨论中，一个不复杂的解的概念是一个分配的概念，即用我们目前的术语说，一个一元集 V。在 4.4.2 中，我们尤其看到，这等于找出一个对于占优关系而言的“第一”元素。我们在第 4 节的随后部分以及 30.2 的讨论中看到，主要是我们的占优概念的非可递性阻止了这一努力，并迫使我们引入分配集作为解。

因此，下述问题的回答是有意义的：对于什么样的博弈来说，一元解 V 存在？关于这样的博弈，我们还能够说些什么？

第二：30.1.1 的假设是从我们关于本质三人零和博弈的经验中提炼出来的。因此，从目前的严格理论的视角重新考虑这一情况是有意义的。当然，我们知道——事实上，这是贯穿我们的讨论的一个指导原则，我们用第 22 和 23 节的最初方法得到的解也是我们目前的假设意义上的解。不过，明确验证这一点还是必要的。然而，关键是断定目前的假设是否给那些博弈带来其他解。（我们已经看

---

① 如果 30.3.6 末尾提到的关系 $\mathscr{S}$ 能够被找到，那么，这个 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{R}$ 的否定就会揭示那些行为标准是这样的核（即子集）：$\mathscr{S}$ 满足集。

见 51.4 中的类似情形，那里，相应运算得到成功运用。——271，①

到，对于同一博弈，存在多个解的情况是难以想像的。）

因此，我们将研究本质三人零和博弈的所有解，并给出令人吃惊的结果。不过，正如我们将会看到的那样，这些结果不是没有道理的。

272 **30.4.2** 事实上，这两种情况包括了 $n \leqq 3$ 的所有零和博弈。我们在 27.5.2 的第一点说明中看到，对于 $n=1$，2，这些博弈是非本质博弈；这与 $n=3$ 的非本质博弈和本质博弈情况结合起来包括了 $n \leqq 3$ 的所有情况。

当这一计划完成时，留给我们的是 $n \geqq 4$ 的博弈，而且，我们已经知道，一个新的困难伴随着它们产生了（见第 250 页脚注①和 27.5.3 末尾）。

30.4.3 第三：在 27.1 中，我们引入了策略等价的概念。看似显然的是，顾名思义，这一关系意味着：有这种关系的两个博弈有相同的策略可能性和结成联盟的动机等。现在，我们已经把解的概念建立在了一个严格的基础之上，这一具有试探性的预期需要一个严格证明。

这些问题将分别在 31.2.3 的(31:P)、32.2 和 31.3.3 的(31:Q)中得到回答。

31. 结　　果

31.1 凸集、平集和占优关系准则

31.1.1 这一节将致力于证明有关解以及围绕着解的其他概念——如非本质性、本质性、占优和有效性——

的各种辅助结果。由于我们已经把这些概念建立在了严格基础之上，绝对严格地证明它们的性质不仅是应该的事情，也是可能的事情。后面的有些演绎也许有点故弄玄虚，有时，口头解释本可以取代数学证明。然而，这样一种方法仅就本节中的部分结果是可能的，把所有事情考虑进去，最好的方案是以充分的数学严格性系统地研究整个问题。

在寻找解的过程中，一些起重要作用的原理是(31:A)、(31:B)、(31:C)、(31:F)、(31:G)和(31:H)。对于特定的联盟来说，这些原理要么总是被考虑进去，要么永远不予考虑。恰当的做法是，把这些原理与其形式证明的(上述意义上的)口头解释结合起来。

另外，一些结果就其自身而言有着不同方面的重要意义。它们合起来界定我们最新得到的概念背景。30.4 中第一和第三个问题的回答将在(31:P)和(31:Q)中给出。另外一个问题将在(31:M)中解决。

31.1.2　考虑两个分配 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$。假设我们必须确定是否有 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。这等于说，我们必须决定是否存在一个具有 30.1.1 中的性质(30:4:a)—(30:4:c)集合 S。作为这些性质之一的(30:4:c)是：对于所有属于 S 的 i，

$$\alpha_i > \beta_i。$$

我们将其称为主要条件(main condition)。另外两个条件，(30:4:a)和(30:4:b)是起始条件(preliminary condition)。 273

现在，对付占优这一概念——即找出 30.1.1 意义上的解 V——的一个主要技术困难是这些起始条件的出现。我们十分希望将其简化，即找到一些准则，在这些准则之

下，它们肯定得到满足，并找到另一些准则，在这些准则下，它们肯定得不到满足。在寻找后一类准则时，不必对于所有分配 $\vec{\alpha}$ 来说它们都涉及起始条件的不满足——只要对于某些分配 $\vec{\alpha}$ 来说它们涉及起始条件的不满足也就足够了，这些 $\vec{\alpha}$ 是这样一些分配，对于某个 $\vec{\beta}$，它们满足主要条件。[见(31:A)或(31:F)的证明，其中恰恰用到了这一点。]

我们感兴趣的是这种性质的准则，这联系着判定一个给定的分配集合 V 是否是一个解的问题。也就是说，确定它是否满足 30.1.1 中的条件(30:5:a)、(30:5:b)——条件(30:5:c)。这等于要确定什么样的 $\vec{\beta}$ 被 V 的元素占优。

在上述情况下，我们最渴望的准则是不论及 $\vec{\alpha}$[①②]，即只论及 S，总体上消除了起始条件的准则[见(31:F)和(31:H)]。但是，我们甚至考虑这样一个准则，它因论及另一个分配 $\vec{\alpha'}$ 的表现而涉及 S 和 $\vec{\alpha}$。[当然，两者都属于 V。见(31:B)。]

为了包括所有这些可能情况，我们引入下面的术语：

我们的证明将尽力确定所有分配 $\vec{\beta}$，这些分配被一个给定的分配集 V 中的元素占优。因此，我们只关注关系 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$($\vec{\alpha}$ 属于 V)以及一个特定的集合 S 是否满足我们对

---

① 这里的关键是，在我们最初的 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 定义中，起始条件论及 S 和 $\vec{\alpha}$(不论及 $\vec{\beta}$)。(30:4:b)尤其如此。——273，①

② 假设中的 V 的元素，它应该占优 $\vec{\beta}$。——273，②

于这一关系而言的起始条件。如果我们知道，(由于 S 满足某一适宜的准则) S 和 $\vec{\alpha}$ 总是满足起始条件，那么，我们称 S 为肯定必要集。如果我们知道，(同样由于 S 满足某一适宜的准则，但也许还涉及其他事情，见上) S 和 $\vec{\alpha}$ 满足起始条件的可能性能够被忽略(因为这永远不会发生，或因为其他理由。见上面的论证)，我们称 S 为肯定不必要集。 274

这些考虑看似十分复杂，但它们表达着一个相当自然的技术观点。①

接下来，我们将给出特定的肯定必要性准则和肯定不必要性准则。在每一准则之后，我们将给出其内容的口头解释，希望这将使我们的技术对于读者来说更为清楚。

31.1.3　第一和第三基本准则：

(31:A)　　如果 S 中存在一个 i 使 $\alpha_i = v[(i)]$，那

---

① 对于熟悉形式逻辑的读者来说，我们给出如下结果：

属性"肯定必要性"和"肯定不必要性"是逻辑性质。它们被描述为我们是否能够(借助任意方法)证明特定逻辑省略不会破坏(某种类型的)证明。具体来说：设有一个有关一个 $\vec{\beta}$ 被 V 的某一元素 $\vec{\alpha}$ 的占优的证明。假设借助集合 S($\vec{\alpha}$ 属于 V)出现的关系 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 受到考虑，那么，如果我们这样对待 S 和 $\vec{\alpha}$(当它们具有问题中的属性的时候)，它们总是(或永不)满足起始条件，不用实际验证这些条件，这一证明也保持成立。我们下面给出的数学证明中，这一方法将常常出现。

也许会发生这样的事情，由于两个不同准则的运用，相同集合 S 对于相同 $\vec{\alpha}$——如它们中的全部——来说既是肯定必要的，又是肯定不必要的。这只不过意味着，上面提到的两个省略都不破坏任何证明。例如，当 $\vec{\alpha}$ 不对任何分配满足主要条件时，这样的事情能够发生。[在(31:E:b)描述的情况中，(31:F)和(31:G)的结合将给出一个例子。另一个例子将在第 310 页脚注①和第 431 页脚注①中指出。]——274，①

么，对于 V 中一个给定的 $\vec{\alpha}$ 来说，S 是肯定不必要的。

解释：如果一个联盟不向每一参与者许诺大于他独自行动能够得到的数额，这一联盟永远不必考虑。

证明：如果 $\vec{\alpha}$ 就某些分配来说满足主要条件，那么，$\alpha_i > \beta_i$。由于 $\vec{\beta}$ 是一个分配，所以 $\beta_i \geqq \mathrm{v}[(i)]$。从而，$\alpha_i > \mathrm{v}[(i)]$。这与 $\alpha_i = \mathrm{v}[(i)]$ 矛盾。

(31:B) 对于 V 中一个给定 $\vec{\alpha}$ 来说，如果对于 V 中另一个 $\vec{\alpha'}$ 来说集合 S 是肯定必要的（且受到考虑），使得

(31:1) $\alpha'_i \geqq \alpha_i$，i 属于 S，

那么，对于 $\vec{\alpha}$ 来说，S 肯定是不必要的。

解释：对于一个给定的联盟来说，如果存在另一个由相同参与者组成的联盟向每一参与者许诺至少不小于前者许诺的数额，那么，这一联盟不必考虑。

证明：令 $\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$ 满足主要条件：对于 S 中任意 i，$\alpha_i > \beta_i$。那么，$\vec{\alpha'}$、$\vec{\beta}$ 也满足它，由(31:1)，对于 S 中任意 i，$\alpha'_i > \beta_i$。
275 由于 S 和 $\vec{\alpha'}$ 受到考虑，说明 $\vec{\beta}$ 被 V 的一个元素占优，且没有必要考虑 S 和 $\vec{\alpha}$。

(31:C) 如果集合 $T \subseteq S$ 是肯定必要的（且受到考虑），那么，S 是肯定不必要的。

解释：如果一个联盟的一部分已经受到考虑，那么，没有必要考虑这个联盟。

证明：令 $\vec{\alpha}$（属于 V）和 $\vec{\beta}$ 就 S 来说满足主要条件，那么，就 $T \subseteq S$ 来说，它们显然更满足它。由于 T 和 $\vec{\alpha}$ 正受到

考虑，从而表明 $\vec{\beta}$ 被 V 的一个元素占优且不必考虑 S 和 $\vec{\alpha}$。

31.1.4 接下来，我们引入更多准则，而且，这些准则有着更加广泛的基础。出于这一目的，我们从下述分析开始：

对于任意的集合 $S=(k_1,\cdots,k_p)$ 运用 25.4.1 中的 (25:5)，结合 $S_1=(k_1),\cdots,S_p=(k_p)$。那么，

$$v(S)\geqq v[(k_1)]+\cdots+v[(k_p)]。$$

即

(31:2)　　$v(S)\geqq\sum_{k\text{属于}S}v[(k)]$。

(31:2)的左边大于其右边的部分是联盟 S 形成（对全体参与者而言）的总潜在利益。我们称此为 S 的凸性。如果这一利益等于零，即如果

(31:3)　　$v(S)=\sum_{k\text{属于}S}v[(k)]$，

那么，我们称 S 是一个平集。

我们有如下直接结果：

(31:D)　　下列集合总是平的：

(31:D:a)　　空集；

(31:D:b)　　每个一元集；

(31:D:c)　　一个平集的每一个子集。

(31:E)　　下述每一种说法都等价于博弈的非本质性：

(31:E:a)　　$I=(1,\cdots,n)$ 是平的；

(31:E:b)　　存在一个 S，使得 S 和 $-S$ 都是平集；

(31:E:c)　　每个 S 都是平集。

证明：(31:D:a)和(31:D:b)的证明：对于这些集合，(31:3)

显然成立。

276 (31:D:c)的证明:假设 $S\subseteq T$,T 是平的。令 $R=T-S$,那么,由(31:2),

(31:4) $$\mathrm{v}(S)\geqq\sum_{k\text{属于}S}\mathrm{v}[(k)],$$

(31:5) $$\mathrm{v}(R)\geqq\sum_{k\text{属于}R}\mathrm{v}[(k)]。$$

由于 T 是平的,由(30:3),我们有

(31:6) $$\mathrm{v}(T)=\sum_{k\text{属于}T}\mathrm{v}[(k)]。$$

因为 $S\cap R=\ominus$,$S\cup R=T$,故

$$\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(R)\leqq\mathrm{v}(T),$$

$$\sum_{k\text{属于}S}\mathrm{v}[(k)]+\sum_{k\text{属于}R}\mathrm{v}[(k)]=\sum_{k\text{属于}T}\mathrm{v}[(k)]。$$

从而,(31:6)意味着

(31:7) $$\mathrm{v}(S)+\mathrm{v}(R)\leqq\sum_{k\text{属于}S}\mathrm{v}[(k)]+\sum_{k\text{属于}R}\mathrm{v}[(k)]。$$

比较(31:4)、(31:5)和(31:7)表明,它们都必须是等式。但(31:4)中的等号恰恰说明 S 是平的。

(31:E:a)的证明:这一说法与 27.4.1 中的(27:B)一致;

(31:E:c)的证明:这一说法与 27.4.2 中的(27:C)一致;

(31:E:b)的证明:对于一个非本质博弈来说,根据(31:E:c),对于任何 S 这一说法都是正确的。相反,如果至少就某一个 S 来说这是正确的,那么,

$$\mathrm{v}(S)=\sum_{k\text{属于}S}\mathrm{v}[(k)],\mathrm{v}(-S)=\sum_{k\text{不属于}S}\mathrm{v}[(k)],$$

由[用 25.3.1 中的(25:3:b)]得

$$0 = \sum_{k=1}^{n} v[(k)],$$

即,根据(31:E:A)或根据 27.4.1 的(27:B),该博弈是非本质博弈。

31.1.5 接下来,我们要证明的是

(31:F) 如果 S 是平的,那么,它也是肯定不必要的。

解释:如果一个博弈不允许一个联盟中的所有成员取得超过他们各自独立行动能够得到的数额的总利益,那么,这个联盟不必受到考虑。[①]

证明:如果借助于这个 S 有 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$,那么,我们有:必然 $S \neq \ominus$。对于 S 中所有 i,$\alpha_i > \beta_i$,且 $\beta_i \geqq v[(i)]$,所以,$\alpha_i > v[(i)]$。故,$\sum_{i属于S} \alpha_i > \sum_{i属于S} v[(i)]$。因为 S 是平的,这意味着 $\sum_{i属于S} \alpha_i > v(S)$。但是,$S$ 必定是有效的,$\sum_{i属于S} \alpha_i \leqq v(S)$,这是一个矛盾。 277

(31:G) 如果 $-S$ 是平的且 $S \neq \ominus$,那么,S 是肯定必要集。

解释:如果一个联盟(不是空的且)是(31:F)中描述的那个联盟的对手,那么,该联盟必须受到考虑。

证明:对于所有分配 $\vec{\alpha}$ 来说,起始条件都得到了满足。

(30:4:a)的证明:$S \neq \ominus$是假设中的事情。

---

① 注意,这联系到(31:A),但并不等同于它!事实上:(31:A)涉及 α_i,即涉及给予每位参与者的许诺。(31:F)涉及 $v(S)$(它决定着 S 是否是平集),即涉及对于所有参与者来说该博弈的可能结果。但是,两个准则都将这些与 $v[(i)]$ 联系起来,即与每位玩家独自行动能够得到的数额联系着。——276,①

(30:4:b)的证明:由于总有 $\alpha_i \geqq v[(i)]$,所以 $\sum_{i\text{不属于}S} \alpha_i \geqq \sum_{i\text{不属于}S} v[(i)]$。因为 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$,上述不等式的左边等于 $-\sum_{i\text{属于}S} \alpha_i$。由于 $-S$ 是平的,右边等于 $v(-S)$,即[应用 25.3.1 中的(25:3:b)]等于 $-v(S)$。所以,$-\sum_{i\text{属于}S} \alpha_i \geqq -v(S)$,$\sum_{i\text{属于}S} \alpha_i \leqq v(S)$,即 S 是有效的。

通过特殊化,我们从(31:F)、(31:G)得

(31:H) 一个 p 元集,如果 $p = n-1$,那么,它是肯定必要的;如果 $p = 0,1,n$,那么,它是肯定不必要的。

解释:如果一个联盟有一个对手,那么,它必须受到考虑;如果一个联盟是空的或只有一个玩家(!),或它没有对手,那么,没有必要考虑它。

证明:$p = n-1$:$-S$ 只有一个元素,从而,根据(31:D),它是平的。那么,该命题是(31:F)的结果。

$p = 0,1$:(31:D)和(31:F)直接给出结果。

$p = n$:在这种情况下,$S = I = (1,\cdots,n)$ 使得主要条件不可能得到满足。事实上,这要求 $\alpha_i > \beta_i$ 对所有 $i = 1,\cdots,n$ 成立,从而 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i > \sum_{i=1}^{n} \beta_i$。但是,$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 都是分配,上述不等式两边都等于零,这是矛盾的。

因此,有可能使 S 成为必要集的 p 被限制到了 $p \neq 0,1,n-1,n$,即区间

(31:8) $2 \leqq p \leqq n-2$。

这个区间只有在 $n \geqq 4$ 时才发挥作用。这里讨论的情况类

似于 27.5.2 末尾和 27.5.3 中的情况，而且，$n=3$ 的情况再次成为特别简单的情况。

31.2　全部解的系和一元解

31.2.1　接下来，我们研究全部解的系的结构。

(31:I)　对于一个非本质博弈来说，恰好存在一个分配：

(31:9)　$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},\alpha_i=\mathrm{v}[(i)],\quad i=1,\cdots,n$。 278

对于一个本质博弈来说，存在无穷多个分配——一个 $(n-1)$ 维连续统——但(31:9)却不是其中之一。

证明：考虑一个分配

$$\vec{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}。$$

令

$$\beta_i=\mathrm{v}[(i)]+\varepsilon_i,\quad i=1,\cdots,n。$$

那么，30.1.1 的特征条件(30:1)和(30:2)变成

(30:10)　$\varepsilon_i\geqq 0,\quad i=1,\cdots,n$。

(30:11)　$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i=-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{v}[(i)]$。

如果 Γ 是一个非本质博弈，那么，27.4.1 中的(27:B)给出 $-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{v}[(i)]=0$；这样，(31:10)、(31:11)等于 $\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_n=0$，即(31:9)是惟一的分配。

如果 Γ 是一个本质博弈，27.4.1 中的(27:B)给出 $-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{v}[(i)]>0$，那么，(31:10)、(31:11)有无穷多个

解，它们形成一个$(n-1)$维的连续统；[①]对于分配$\vec{\beta}$来说，有同样的结果。但是，(31:9)的$\vec{\alpha}$不是它们之中的一个，因为$\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_n=0$违背了(31:11)。

一个直接结果：

(31:J)　　一个解V不会是一个空集。

证明：也就是说，空集$\ominus$不是一个解。事实上，考虑任一分配$\vec{\beta}$，根据(31:I)——至少存在着一个$\vec{\beta}$。$\vec{\beta}$不属于$\ominus$且$\ominus$中没有$\vec{\alpha}$使$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$。故$\ominus$不满足30.1.1中的(30:5:b)。[②]

31.2.2　我们曾经在前面指出过，

(31:12)　　$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta},\vec{\beta}\succ\vec{\alpha}$

根本不可能同时成立。[③] 然而：

(31:K)　　$\vec{\alpha}\succ\vec{\alpha}$永远不会发生。

279 证明：对于$\vec{\alpha}=\vec{\beta}$，30.1.1中的(30:4:a)和(30:4:c)冲突。

(31:L)　　给定一个本质博弈和一个分配$\vec{\alpha}$，存在一个分配$\vec{\beta}$使得$\vec{\beta}\succ\vec{\alpha}$，但没有$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$。[④]

---

① 仅有一个方程：(31:11)。——278，①

② 这里的论证有卖弄学问之嫌。不过，如果对于分配来说条件是冲突的[即没有(31:I)]，那么，$V=\ominus$就会是一个解。——278，②

③ 这两个占优的集合S就不得不相交。由(31:H)，这些S至少要有两个元素。所以，(31:12)只有在$n\geqq4$的情况中才可能发生。

经过认真分析，$n=4$的情况能够被排除。不过，对于$n\geqq5$的情况，(31:12)的确可能发生。——278，③

④ 从而，$\vec{\alpha}\neq\vec{\beta}$。——279，①

证明：令

$$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}。$$

考虑方程

(31:13)　$\alpha_i=\mathrm{v}[(i)]$。

由于该博弈是本质博弈，(31:I)排除了(31:13)对所有 $i=1,\cdots,n$ 都成立。假设(31:13)不成立，如它在 $i=i_0$ 时不成立。由于 $\vec{\alpha}$ 是一个分配，所以 $\alpha_{i_0}\geqq \mathrm{v}[(i_0)]$，从而，(31:13)的不成立意味着 $\alpha_{i_0}>\mathrm{v}[(i_0)]$，即

(31:14)　$\alpha_{i_0}=\mathrm{v}[(i_0)]+\varepsilon,\quad \varepsilon>0$。

定义一个向量

$$\vec{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\},$$

其中，

$$\beta_{i_0}=\alpha_{i_0}-\varepsilon=\mathrm{v}[(i_0)],$$

$$\beta_i=\alpha_i+\frac{\varepsilon}{n-1},\quad i\neq i_0。$$

这些方程明确了 $\beta_i\geqq \mathrm{v}[(i)]$[①]和 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i=0$。[②] 所以，$\vec{\beta}$ 是一个与 $\vec{\alpha}$ 相近的分配。

接下来，我们证明有关 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 的两个结论。

$\vec{\beta}\succ\vec{\alpha}$：对于所有 $i\neq i_0$，即对于属于集合 $S=-(i_0)$ 的

---

① 对于 $i=i_0$，我们实际上有 β_{i_0}。对于 $i\neq i_0$，我们有 $\beta_i>\alpha_i\geqq \mathrm{v}[(i)]$。——279，②

② $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i$ 是因为，当 $i=i_0$ 时，β_i 与 α_i 之差是 ε，而对于其他 $n-1$ 个 i 值，其差是 $-\frac{\varepsilon}{n-1}$。——279，③

所有 i，我们有 $\beta_i > \alpha_i$。这个集合有 $n-1$ 个元素且（对于 $\vec{\beta}$、$\vec{\alpha}$）满足主要条件，所以，(31:H) 给出 $\vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$。

$\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$ 不成立：假设 $\vec{\alpha} \succ \vec{\beta}$。那么，满足主要条件的集合 S 必定存在，它没有被 (31:H) 排除。由 $\vec{\beta}$ 的结构，前者
280 意味着 $\beta_i > \alpha_i$；根据主要条件，后者意味着 $\alpha_i > \beta_i$。这是一个矛盾。

31.2.3 我们能够得出我们最初感兴趣的结论：

(31:M) 当且仅当一个博弈是非本质博弈时，存在一个分配 $\vec{\alpha}$，$\vec{\alpha'} \succ \vec{\alpha}$ 永远不会发生。[1]

证明：充分性：如果该博弈是一个非本质博弈，那么，根据 (31:I)，它恰好有一个分配 $\vec{\alpha}$，且这个分配有要求的性质 (31:I)

必要性：如果该博弈是本质博弈，且 $\vec{\alpha}$ 是一个分配，那么，(31:L) 的 $\vec{\alpha'} = \vec{\beta}$ 给出 $\vec{\alpha'} = \vec{\beta} \succ \vec{\alpha}$。

(31:N) 有一个一元解[2]的博弈必然是一个非本质博弈。

证明：把上面所说一元解记为 $V = (\vec{\alpha})$。V 必定满足 30.1.1 中的 (30:5:b)。在我们目前的条件下，这意味着：每一不同于 $\vec{\alpha}$ 的 $\vec{\beta}$ 都被 $\vec{\alpha}$ 占优。即：

---

① 见 30.2.2 中 (30:A:a) 的分析，尤其见第 265 页脚注②。——280，①

② 我们并没有排除这样的可能性，即这一博弈可以有其他解，它们可能是，也可能不是一元解。事实上，在我们目前的假设下，这样的事情永远不会发生，这是 (31:N) 的结果与 (31:O) 的结果——或 (31:P) 的结果——所表明的。不过，目前的分析与此无关。——280，②

$$\vec{\beta} \neq \vec{\alpha} \text{ 意味着 } \vec{\alpha} \succ \vec{\beta}。$$

现在,如果该博弈是一个本质博弈,那么,(31:L)给出一个违背这一条件的$\vec{\beta}$。

(31:O)　　一个非本质博弈恰好有一个解V。这个解正是一元集V=($\vec{\alpha}$),其中,$\vec{\alpha}$是(31:I)的$\vec{\alpha}$。

证明:由(31:I),恰好存在一个分配,即(31:I)的$\vec{\alpha}$。根据(31:J),一个解V不可能是空集,所以惟有V=($\vec{\alpha}$)。V=($\vec{\alpha}$)的确是一个解,即它满足30.1.1中的(30:5:a)、(30:5:b):前者得自(31:K),根据(31:I),后者的理由是,$\vec{\alpha}$是惟一一个分配。

现在,我们能够完美地回答30.4.1中的第一个问题了:

(31:P)　　一个博弈有一个一元解(见上面脚注②)的充分必要条件是,它是一个非本质博弈;而且,该博弈没有其他的解。

证明:这是(31:N)和(31:O)的结果的结合。

31.3　与策略等价性相对应的同构

31.3.1　考虑分别有特征函数v(S)和v′(S)的两个博弈Γ和Γ′,它们是27.1意义上的策略等价博弈。我们要证明的是,从30.1.1的定义的角度看,它们是真正等价的。为完成这个任务,我们要证明,构成30.1.1中的定义的基础的分配之间同构。也就是说,我们希望建立Γ的一个分配与Γ′的一个分配之间的一个一一对应,就这些概念而言,它是同构的,即它把Γ中的有效集、占优关系和解 *281*

变成Γ′中相应的东西。

这一分析只不过是27.1.1的试探性说明的严格化和细节化,因此读者可以认为没有必要这么做。然而,它们给出了"同构证明"的一个有指导意义的例子;再有,我们前面关于口头证明与严格证明之间关系的说明再次适用。

31.3.2 在27.1.1中的(27:1)和(27:2)意义上,策略等价性由 $\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0$ 给出。考虑Γ的所有分配 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\cdots,2_n\}$,Γ′的所有分配$\overrightarrow{\alpha'}=\{\alpha_1',\cdots,\alpha_n'\}$。我们要寻找一个具有指定性质的一一对应:

(31:15) $$\vec{\alpha}\leftrightarrows\overrightarrow{\alpha'}。$$

从27.1.1开头的动机中不难猜到(31:15)应该是什么。在那里,我们描述了通过给玩家 k 一个固定支付 α_k^0 实现从Γ到Γ′的过渡。把这一原理运用于分配则意味着

(31:16) $$\alpha_k'=\alpha_k+\alpha_k^0,\quad k=1,\cdots,n。$$①

相应地,我们用方程(31:16)来定义对应(31:15)。

31.3.3 接下来,我们验证(31:15)和(31:16)的性质。

Γ的分配映射到Γ′的分配:由30.1.1中的(30:1)和(30:2),这是说,

(31:17) $$\alpha_i\geqq \mathrm{v}[(i)],\quad i=1,\cdots,n。$$

(31:18) $$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0,$$

变为

(31:17*) $$\alpha_i'\geqq \mathrm{v}'[(i)],\quad i=1,\cdots,n。$$

① 如果我们引入固定向量 $\overrightarrow{\alpha^0}=\{\alpha_1^0,\cdots,\alpha_n^0\}$,那么,(31:16)可以被写成 $\overrightarrow{\alpha'}=\vec{\alpha}+\overrightarrow{\alpha^0}$,即它是分配向量空间中 $\vec{\alpha}$ 的一个平移。——281,①

(31:18*)　　$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i{}' = 0$。

对于(31:17)，(31:17*)来说，这是因为，根据 27.1.1 中的(27:2)，$v'[(i)] = v[(i)] + \alpha_i^0$；对于(31:18)和(31:18*)来说，这是因为，由(27:1)，$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 = 0$。 282

对于 Γ 而言的有效性变成了对于 Γ′而言的有效性：根据 30.1.1 中的(30:3)，这意味着，

$$\sum_{i \text{属于} S} \alpha_i \leqq v(S)$$

变为

$$\sum_{i \text{属于} S} \alpha_i{}' \leqq v'(S)。$$

这一点由(31:16)与(27:2)之间的比较得到验证。

对于 Γ 而言的占优变为对于 Γ′而言的占优：对于 30.1.1 中的(30:4:a)—(30:4:c)来说，这意味着同样的事情。(30:4:a)无关紧要；(30:4:b)是有效性，这是我们已经证明了的；(30:4:c)是说，$\alpha_i > \beta_i$ 变为 $\alpha_i{}' > \beta_i{}'$，这是显然的。Γ 的解被映射为 Γ′的解：对于 30.1.1 中的(30:5:a)和(30:5:b)[或(30:5:c)]来说，这意味着不相同的事情。这些条件仅仅涉及占优，这一问题已解决。

我们把这些结果重述为：

(31:Q)　　如果两个零和博弈 Γ 和 Γ′是策略等价的，那么，它们的分配之间存在着一个同构，即从 Γ 的东西到 Γ′的东西的一个一一映射，使 30.1.1 中定义的概念保持不变。

32. 本质三人零和博弈的全部解的确定

32.1 数学描述和几何方法

32.1.1 让我们回到 30.4.1 中描述的第二个问题：本质三人零和博弈的全部解的决定。

我们知道，我们可以按照其简化型分析这一博弈，而且我们能够选择 $\gamma = 1$。[①] 在这种情况下，正如我们在前面讨论过的那样[②]，特征函数是完全确定的：

$$(32:1) \qquad \text{当 } S \text{ 有} \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \text{个元素时，} \quad \mathrm{v}(S) = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{cases}。$$

一个分配是一个向量

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$

283 它的三个分量都必须满足 30.1.1 中的(30:1)和(30:2)。这些条件现在变成了

$$(32:2) \qquad \alpha_1 \geqq -1, \alpha_2 \geqq -1, \alpha_3 \geqq -1,$$

$$(32:3) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0。$$

我们从 31.2.1 中的(31:I)知道，α_1、α_2、α_3 仅仅形成一个

---

① 见 29.1 开头的讨论或那里给出的参考文献：27.1 和 27.3 中的第二点说明。——282，①

② 见 29.1 开头或 27.5 的第二种情况。——282，②

二维连续统，即它们能够在一个平面中得到描述。事实上，(32:3)使得一个十分简单的平面描述成为可能。

32.1.2 为此，我们在这个平面中取三个轴，它们之间形成60°角。对于该平面上的任意一点，我们定义 α_1、α_2、α_3 为该点到三个轴的垂直距离。这整个安排，尤其是给予 α_1、α_2、α_3 的符号如图52所示。不难验证，对于任意一点来说，这三个垂直距离之和都等于零；而且，反过来，任意一个和为零的三维数组 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 也都对应着 284
一个点。

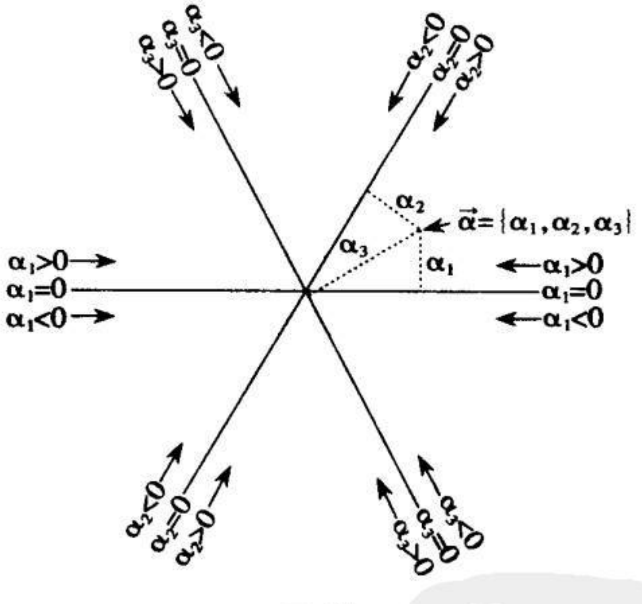


图 52

因此，图52中的平面恰好表达了条件(32:3)。从而，条件(32:2)等于对图52中的平面之内的 $\vec{\alpha}$ 施加一个限制。这个限制显然是，它必须位于 $\alpha_1 = -1$，$\alpha_2 = -1$，$\alpha_3 = -1$ 三

条线形成的三角形之内或其边上。图 53 说明了这一点。

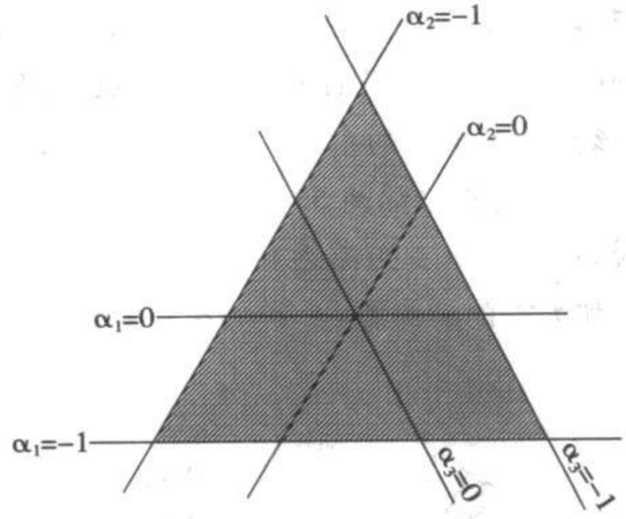


图 53

因此,我们称之为基本三角形内的阴影区域代表着满足(32:2)和(32:3)的 $\vec{\alpha}$,即全部分配。

32.1.3 接下来,我们表达这一几何表示中的占优关系。因为 $n=3$,(31:H)[或 31.1.5 末尾的(31:8)的讨论]告诉我们,$I=(1,2,3)$ 的子集中,有两个元素的那些子集是肯定必要的,其他的则是肯定不必要的。也就是说,在全部解 V 的决定中,我们必须考虑的集合刚好是:

$$(1,2);\quad (1,3);\quad (2,3)。$$

因此,对于

$$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\},\vec{\beta}=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$$

来说,占优关系

$$\vec{\alpha}\succ\vec{\beta}$$

意味着

(32:4)　$\alpha_1 > \beta_1, \alpha_2 > \beta_2; \alpha_1 > \beta_1, \alpha_3 > \beta_3; \alpha_2 > \beta_2, \alpha_3 > \beta_3$。

图形描述：图 54 中，$\vec{\alpha}$ 占优阴影区域之内的点，不占优其他点。①

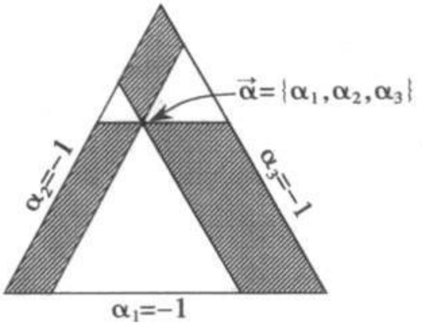


图 54

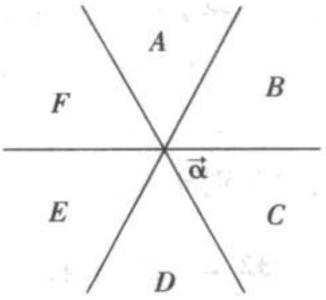


图 55

因此，点 $\vec{\alpha}$ 占优图 55 中六分周中的三个（即 A、C 和 E）。由此，我们不难得出结论：$\vec{\alpha}$ 被另外三个六分周（即 285 B、D 和 F）占优。所以，不占优 $\vec{\alpha}$ 也不被 $\vec{\alpha}$ 占优的点是落在划分六分周的三条线（即六条半直线）上的点。也就是说，

(32:5)　如果 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 不相互占优，那么，从 $\vec{\alpha}$ 到 $\vec{\beta}$ 的方向平行于基本三角形一条边。

32.1.4　现在，我们能够系统地寻找全部解了。

考虑一个解 V，即基本三角形中的一个集合，而基本三角形满足 30.1.1 中的条件(30:5:a)和(30:5:b)。在下面的研究中，我们将利用这些条件且不再每次都明确指

---

①　尤其不包括边界线上的点。——284，①

出它们。

由于该博弈是一个本质博弈，V 至少包含两个点[①]，如 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$。由(32:5)，从 $\vec{\alpha}$ 到 $\vec{\beta}$ 的方向平行于基本三角形的一个边；而且通过玩家号码 1、2、3 的置换，我们能够使这条边是 $\alpha_1 = -1$，即水平的那条边。这样，$\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 就落在一条水平线 l 之上。现在，有两种可能性：

(a) V 的每一点都落在 l 上；

(b) V 的有些点不落在 l 上。

我们分别研究它们。

32.2 全部解的决定

32.2.1 我们首先考虑(b)。不落在 l 上的任何点必定同时就 $\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 满足(32:5)，即它必定是 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 为基的两个等边三角形之一的第三个顶点：图 56 中 $\vec{\alpha'}$、$\vec{\alpha''}$ 中的一个。所以，$\vec{\alpha'}$ 或 $\vec{\alpha''}$ 属于 V。V 的不同于 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 的任一点以及 $\vec{\alpha'}$ 或 $\vec{\alpha''}$ 必定满足(32:5)，但现在要对所有三个点 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$ 和 $\vec{\alpha'}$(或 $\vec{\alpha''}$)满足。看一下图 56 就会发现，这是不可能的。这样，V 恰好由这三个点组成，即图 57 中位于三角形 I 或三角形 II 的一个三角形的三个顶点。将图 57 与图 54 或图 55 比较表明，三角形 I 的顶点留下这一三角形内部的点不被占优。这就排除了 I。[②]

---

① 图 54 中，这是能够直接看到的事情。——285，①

② 这提供了 30.3.6 中提到的例子：三角形 I 的三个顶点不相互占优，即它们形成上述意义上的一个令人满意的集合。不过，它们却不适合作为一个解的一个子集。——285，②

286

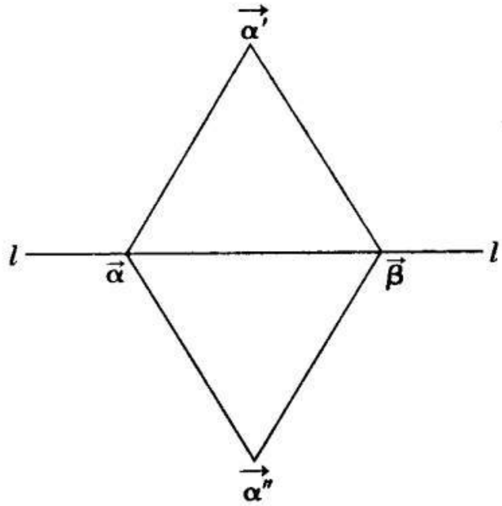


图 56

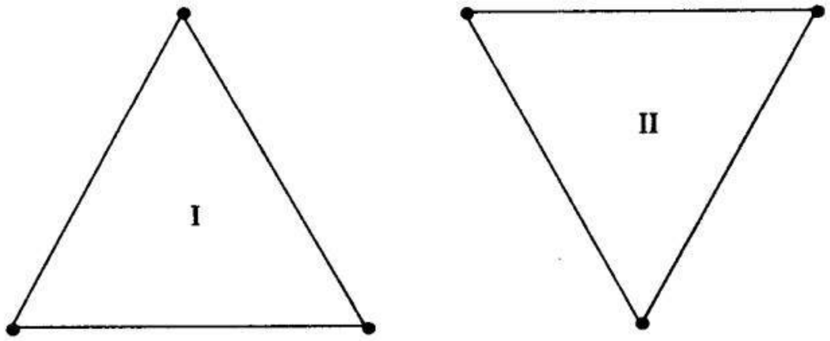


图 57

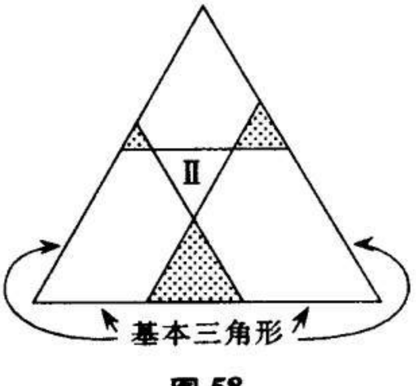


图 58

图 59

287 相同的比较表明，三角形 II 的顶点使图 58 中阴影区域内的点不被占优。因此，三角形 II 必须以这样的方式在基本三角形中放置，使得这些阴影区域全部落在基本三角形的外面。如图 59 所示，这意味着，II 的三个顶点必须落在基本三角形的三个边上。因此，这三个顶点是基本三角形的三条边的中点。

图 59 与图 54 或图 55 的比较表明，这个集合 V 的确是一个解。不难验证，这三个中点是

$$\left\{-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\},\left\{\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right\},\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right\}, \tag{32:6}$$

即解 V 是图 51 中的集合。

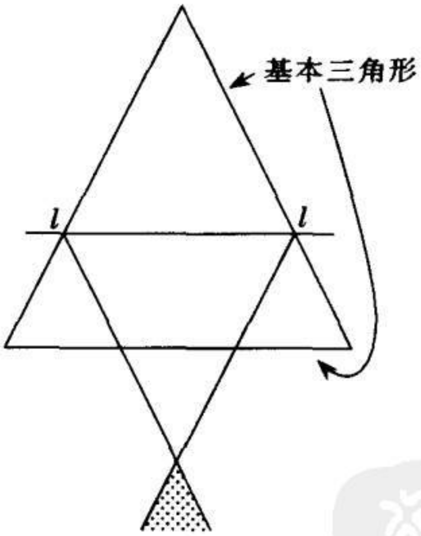


图 60

32.2.2 下面，我们考虑 32.1.4 中的(a)。在这种情况下，V 的全部落在水平线 l 上。由(32:5)，l 上

任何两点都不会相互占优，所以 l 上的每一点都不被 V 占优。从而，l 上的（在基本三角形之内的）每一点必定属于 V。也就是说，V 恰好是直线 l 的属于基本三角形的那一部分。因此，V 的元素 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 由下述方程描述

(32:7)　　$\alpha_1=c$。

见图 60。

图 60 与图 54 或图 55 的比较表明，直线 l 使图 60 中点点的区域不被占优。因此，直线 l 必定以这样的方式位于基本三角形之中，使得阴影区域全部落在基本三角形的外面。这意味着，l 必须落在基本三角形与其相交的两条边的中点的下方。① 用（32:7）的术语说：$c<\frac{1}{2}$。另一方面，$c\geqq -1$ 288
是 l 与基本三角形相交的必要条件。所以，我们有：

(32:8)　　$-1\leqq c<\frac{1}{2}$。

图 60 与图 54 或图 55 的比较表明，在这些条件下②，集合 V——即 l——的确是一个解。

但是，这个解的形式（32:7）得自玩家号码 1、2、3 的一

---

① l 的极限位置，穿过中点本身，必须被排除。理由是，在这个位置，点点的区域的顶点就会落在基本三角形上，这是不允许的，因为这个点也不被 V 即 l 占优。

要看到，在情况（b）中，不存在相应的禁止，即不存在图 58 中点点的区域。它们的顶点也不被 V 占优，但它们属于 V。在 V 目前的位置，受到考虑中的顶点却不属于 V，即不属于 l。

排除这一极限位置的结果是接下来的不等式中的 ≦ 变成 <。——288，①

② （32:8），即 l 与基本三角形相交，但不相交于其边的中点。——288，②

个恰当排列。因此，我们还有另外两个解，它们由

(32:7*)　　$\alpha_2 = c$

和

(32:7**)　　$\alpha_3 = c$

描述，并总是满足(32:8)。

32.2.3 总结：

下面是解的全部列举：

(32:A)　　对于每个满足(32:8)的 c：三个集合 (32:7)、(32:7*)和(32:7**)。

(32:B)　　集合(32:6)。

33. 结　　论

33.1 解的多样性、歧视及其含义

33.1.1 我们要对第32节的结果进行认真分析。我们已经决定了本质三人零和博弈的全部解。在30.1的严格定义被给出之前，我们已经在29.1中决定了我们希望的解；而且，这个解重新表现为(32:B)。但是，我们又发现了其他的解：(32:A)，它是一个无穷集，其中每一个是一个无穷分配集。这些解代表着什么呢？

以(32:A)中的(32:7)为例。对于(32:8)的每个 c，这给出一个解，它由满足(32:7)即 $\alpha_1 = c$ 的分配 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1,$
289 $\alpha_2, \alpha_3\}$ 组成。除此之外，它们还满足30.1.1的(30:1)和(30:2)，即32.1.1的(32:2)和(32:3)。换句话说：我们

的解由全部

(33:1)　　$\vec{\alpha}=\{c,a,-c-a\}$，　$-1\leqq a\leqq 1-c$

组成。

显然，这个解的解释是：玩家之一（此时的玩家 1）受到另外两位玩家（此时的玩家 2、3）的歧视。他得到的数额 c 是由他们指定的。对于解中的所有分配来说，即对于所有“公认的行为标准”来说，这个数额是相同的。玩家 1 在这个社会中的地位是由另外两位玩家指定的，他被排除在所有可能导致联盟的谈判之外。这样的谈判是在另外两位玩家之间进行的：他们之间如何分配 $-c$ 完全取决于他们的谈判能力。解——公认的行为标准——绝对不限制他们之间的、由 a 和 $-c-a$ 表达的份额分配方式。① 这并不令人吃惊。因为被排斥的那位玩家是绝对“禁忌”的，联盟中不存在伙伴退出的威胁。也不存在确定的分赃方式。②③

33.1.2　关于一位玩家受到的“歧视”，我们有更多值得说明的东西。

首先，一位玩家受到的歧视并非完全不受约束。表达歧视程度的数量 c 受到 32.2.2 中(32:8)的限制。(32:8)的一部分，$c\geqq -1$ 的含义充分明确，但其另一部分 $c<\frac{1}{2}$ 的意义则

---

① 两者都必须 $\geqq -1$，即每位玩家独自能够得到的数额。

a，$-c-a\geqq -1$ 就是(33:1)的 $-1\leqq a\leqq 1-c$。——289，①

② 见 25.2 末尾的讨论。要看到，我们在那里为了说明 $v(S)$ 而罗列的理由在这一特殊情况下不再有效，不过 $v(S)$ 仍然决定着解！——289，②

③ 要看到，由于 32.2.2 中的(32:8)，“赃物”，即数额 $-c$，可以是正的，也可以是负的。——289，③

相当玄妙。[1] 这全部归结为：尽管一个随意的歧视机制能够与一个稳定的行为标准——即社会秩序——相容，但它必须满足一定的数量条件，以使其不会损害稳定性。

第二，对于受歧视的那位玩家来说，歧视未必明显不利。但也不会是明显有利，即他的固定值 c 不能够等于或优于他人期望的最好结果。这意味着，由(33:1)，$c \geqq 1-c$，即 $c \geqq \frac{1}{2}$。这正是(32:8)禁止的事情。但是，当 $c=-1$ 时，歧视就成了明显不利的事情了；而且，根据(32:8)，这是可能的，但不是惟一的。$c=-1$ 意味着，这位玩家不但被排斥了，而且被百分之百剥夺了。(32:8)中其余的 c，
290 $-1<c<\frac{1}{2}$，对应着逐渐减轻的不利隔离方式。

33.1.3 引人注目的是，我们的解的概念能够表达无歧视的(32:B)的所有这些细微差别，也能表达有歧视的行为标准(32:A)——$c=-1$ 的百分之百的伤害形式，以及伤害逐渐减轻的一个连续族，$-1<c<\frac{1}{2}$。尤其显著的是，我们本无意寻找这些事情——29.1 的试探性讨论肯定也没有这种精神，但严格的理论本身却迫使我们得出了这些结论。而且，这些情况甚至出现在极其简单的三人零和博弈的结构之中！

对于 $n \geqq 4$，可以预料，将会有更多种类的歧视、特殊待遇。除此之外，我们还必须准备着寻找与(32:B)相似

① 在 $c<\frac{1}{2}$ 中，= 被排除了，但在 $c \geqq -1$ 中，= 则没有被排除。——289，④

的东西，即无歧视的“公正”解。不过，我们将会看到，情况远非如此简单。而且，我们还将看到，正是关于有歧视的解的研究带来了对一般非零和博弈的正确理解及其在经济学中的应用。

33.2 静态与动态

33.2 这里，回忆一下 4.8.2 关于静态和动态的讨论也许是有益的。我们在那里的讨论是有用的。事实上，其真正意义是我们的理论现已达到的阶段。

在 29.2 和那里提到的其他地方，我们讨论了联盟形成之前、决定着联盟的谈判、预期和担心。这些事情都是 4.8.2 的准动态型。这同样适用于 4.6 和 30.2 中的讨论，即各种分配之间是否相互占优如何依赖于它们与一个解的关系；也就是说，已经建立起来的行为标准所允许的行为如何既不相互冲突，又能够被用于使没有得到认可的行为变得不可信。

在一个静态理论中使用这样的分析，其理由和必要性是前面说明过的，这里不再重复。

第7章 四人零和博弈

34. 准备性研究

34.1 概要

291 **34.1** 我们已经有了 n 人零和博弈的一般理论，但是，我们的信息状况还远远不能令人满意。除了定义的形式化描述之外，我们并没有取得很多结果，而且这些结果是肤浅的。我们已经给出的应用——即我们成功地决定了特殊情况的解——只能说提供了一个初步的方向。正如我们在 30.4.2 中指出的那样，这些应用囊括了 $n \leqq 3$ 的情况。过去的讨论告诉我们，与一般问题相比，我们已经取得的结果微不足道。因此，我们必须转向 $n \geqq 4$ 的情况，只有在这类情况下，联盟之间的相互影响才会表现出充分的复杂性。只有掌握了主导这些现象的机理，我们才能够进一步深入理解我们的问题的本质。

这一章要讨论的是四人零和博弈。我们关于这些博弈的信息相当贫乏。因此，我们只能给出一个不详尽和概

原书缺页

序列中每个 S 总有这同一个序列中的另一个集合作为其补集。具体说:第一个与最后一个,第二个与第五个,第三个与第四个互为补集。从而,它们的 $v(S)$ 互为负数。还要牢记的一点是,根据 27.2 中的不等式(27:7)($n=4$, $p=2$),所有这些 $v(S)$ 都 $\leqq 2$, $\geqq -2$。所以,如果我们令

$$(34:2)\qquad \begin{cases} v[(1,4)]=2x_1, \\ v[(2,4)]=2x_2, \\ v[(3,4)]=2x_3, \end{cases}$$

那么,我们有

$$(34:3)\qquad \begin{cases} v[(2,3)]=-2x_1, \\ v[(1,3)]=-2x_2, \\ v[(1,2)]=-2x_3, \end{cases}$$

而且,

$$(34:4)\qquad -1\leqq x_1, x_2, x_3\leqq 1。$$

反之,如果任意给定满足(34:4)的三个数 x_1、x_2、x_3,那么,我们能够按照(34:1)—(34:3)就 $I=(1,2,3,4)$ 的全部子集 S 定义一个函数 $v(S)$,但是,我们必须证明,这个 $v(S)$ 是一个博弈的特征函数。根据 26.1,这意味着,我们当前的 $v(S)$ 满足 25.3.1 的条件(25:3:a)—(25:3:c)。其中,(25:3:a)和(25:3:b)显然是满足的,只剩下(25:3:c)有待证明。根据 25.4.2,这意味着,要证明的是,如果 S_1、S_2、S_3 是 I 的分解,那么,

$$v(S_1)+v(S_2)+v(S_3)\leqq 0。$$

[见 25.4.1 中的(25:6)。]如果 S_1、S_2、S_3 中的任何一个是空集,那么,另外两个互补,而且根据 25.3.1 中的(25:3:a)和(25:3:b),我们甚至会有等式。这样,我们

可以假设 S_1、S_2、S_3 中的任何一个都不会是空集。由于总共有四个元素，这些集合中必定有一个，如 $S_1 = S$，是一个二元集，而其余两个是一元集。因此，我们的不等式变成

$$\mathrm{v}(S) - 2 \leqq 0, \text{即 } \mathrm{v}(S) \leqq 2。$$

如果我们就全部二元集表达这一关系，那么，(34:2)和(34:3)将该不等式转变为

$$2x_1 \leqq 2, \quad 2x_2 \leqq 2, \quad 2x_3 \leqq 2,$$
$$-2x_1 \leqq 2, \quad -2x_2 \leqq 2, \quad -2x_3 \leqq 2,$$

这等价于(34:4)。这样，我们已经证明了：

(34:A) 本质四人零和博弈（在其 $\gamma = 1$ 的简化型中）严格对应着满足不等式(34:4)的三个数 x_1、x_2、x_3 组成的三维数组。这样一个博弈，即其特征函数，与其 x_1、x_2、x_3 之间的对应由方程(34:1)—(34:3)给出。① *293*

34.2.2 上面的三个数 x_1、x_2、x_3 组成的数组表明，一个本质四人零和博弈能够借助一个简单的图形来讨论。我们能够把数 x_1、x_2、x_3 看作笛卡尔坐标系中一个点的坐标。② 在这种情况下，不等式(34:4)描述了空间的一个部分，它正好填满一个立方体 Q。这个立方体以坐标原点为中心，如图 61 所示，由于其六个面是如下六个平面，

$$x_1 = \pm 1, \quad x_2 = \pm 1, \quad x_3 = \pm 1,$$

---

① 读者可以将我们的结果与 29.1.2 关于三人零和博弈的结果进行比较。从中可以看出，可能结果如何增加了。——293，①

② 我们还能够把这些数看作 16.1.2 意义上的 L_3 中的一个向量的分量。正如第 304 页脚注①中那样，这样做有时更方便。——293，②

其棱的长度是2。

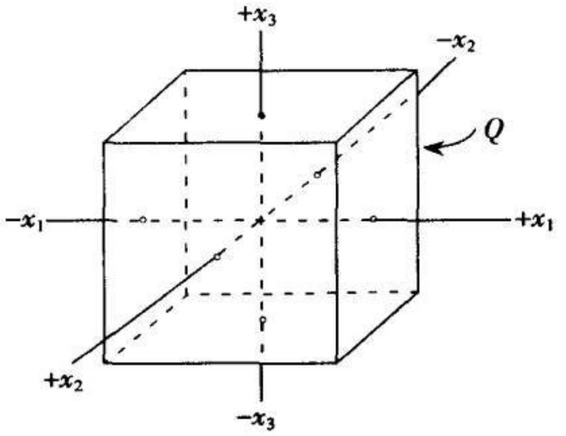


图 61

因此，每个本质四人零和博弈Γ恰好由这个正方形内或其表面上的一个点代表，反之亦然。以这种方式看待这些博弈并试图将其奇妙之处与 Q 中的几何条件联系起来是十分有益的。尤其有指导意义的是，这些博弈与 Q 的特定显著点等同起来了。

294 但是，在实施这一计划之前，我们要考虑一下特定的对称性问题。我们想揭示玩家1、2、3、4的排列与 Q 的几何变换（运动）之间的关系。事实上，根据28.1，前者对应着博弈Γ的对称性，而后者显然表达的是几何体的对称性。

34.3 玩家的置换

34.3.1 在继续对本质四人零和博弈进行几何描述时，我们不得不进行一个带有随意性的运算，即一个会破坏最初情况的、带有部分对称性的运算。事实上，在描述二元集 S 的

v(S)时，我们不得不从六个集合中单独拿出三个，以引入坐标 x_1、x_2、x_3。为此，我们将在(34:2)和(34:3)中指定玩家 4 的特殊作用，并建立玩家 1、2、3 与数量 x_1、x_2、x_3 的对应关系[见(34:2)]。因此，玩家 1、2、3 的一个排列将导致相同的坐标排列 x_1、x_2、x_3，并且到目前为止，排列是对称的。但是，这只是玩家 1、2、3、4 的 24 种置换中的 6 个。[①] 这样，玩家 4 被另一个玩家替换的排列没有以这种方式考虑进去。

34.3.2　下面，我们就考虑这样一个置换。由于即将说明的理由，我们考虑置换 A，它对换了玩家 1 和玩家 4 以及玩家 2 和玩家 3。[②] 看一下(34:2)和(34:3)，不难发现，这一置换使 x_1 保持不变，而它用 $-x_2$、$-x_3$ 替换了 x_2、x_3。类似地，可以验证：置换 B，对换玩家 2 和 4，1 和 3，x_2 保持不变，用 x_1、$-x_3$ 替换 x_1、x_2。置换 C，对换玩家 3 和 4，1 和 2，x_3 保持不变，用 $-x_1$、$-x_2$ 替换 x_1、x_2。

因此，只是在 x_1、x_2、x_3 的正负号受到关注时，A、B、C 这三个置换中的每一个才影响到这三个变量，每一置换改变两个变量的正负号，另一个的正负号不变。

由于它们也被玩家 4 分别变成玩家 1、2、3，如果与玩家 1、2、3 的 6 种置换结合起来，它们产生玩家 1、2、3、4 的所有置换。现在，我们已经看到，后者对应着 x_1、x_2、x_3 的 6 种置换（不改变符号）。所以，1、2、3、4 的 24 种置换对应着 x_1、x_2、x_3 的 6 种置换，其每一个连带着没有正负号变化

---

① 见 28.1.1，(28:A:a)和(28:A:b)定义之后。——294，①

② 用 29.1 中的符号：

$$A=\begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,3,2,1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,4,1,2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,1,4,3\end{pmatrix}。$$——294，②

或两个正负号变化。①

295 **34.3.3** 我们也可以这样说：如果考虑空间中所有把立方体 Q 变成它自己的运动，不难验证，它们正是坐标轴 x_1、x_2、x_3 的置换与坐标平面（即平面 $x_2,x_3;x_1,x_3;x_1,x_2$）的翻转结合。数学上，这些是 x_1、x_2、x_3 的置换与 x_1、x_2、x_3 中正负号的任意变化的结合。这有 48 种可能结果。② 在这 48 种可能结果中，偶数个（即 0 或 2）符号变化的 24 对应着玩家的置换。

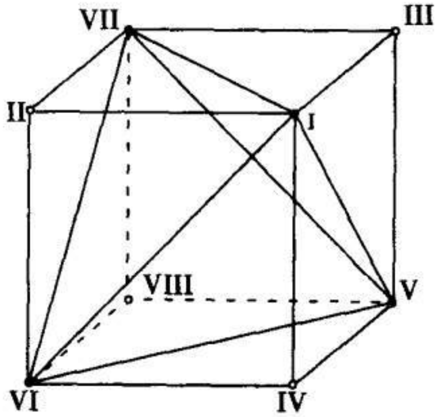


图 62

不难验证，这 24 个运算，不仅把 Q 变成它自己，而且还把图 62 中的四面体 I、V、VI、VII 变成它自己。你也可以这样描述这一运动，即它把图中 Q 的一个顶点●变成一个顶点●；且把一个顶点○变成一个顶点○，一个顶点

① 每种情况中，这些正负号变化共有 1 + 3 = 4 种可能性，这样，我们有 6 × 4 = 24 种对 x_1、x_2、x_3 的运算以表示 1、2、3、4 的 24 种置换。——294，③

② 对于每一个变量 x_1、x_2、x_3 来说，存在两种可能性：变或不变。这给出 $2^3 = 8$ 种可能性。结合 x_1、x_2、x_3 的 6 种置换，产生 8 × 6 种运算。——295，①

●永远不可能被变成一个顶点○。[①]

通过直接描述与立方体 Q 的特定点相对应的博弈，我们即将得到这些说法的更为直接的解释：这些点分别是 Q 的顶点●和顶点○，Q 的中心（即图 61 中的原点）和 Q 的主对角线。

35. 立方体 Q 的一些特殊点的讨论

35.1　隅角 I（和 V、VI、VII）

35.1.1　我们首先研究与四个隅角（corner）●：I、V、VI、VII 相应的博弈。我们已经看到，通过适当置换玩家 1、2、3、4，这些点中的一个可以得自另一个。因此，研究其中的一个，如 I，就足够了。

点 I 对应着坐标 x_1、x_2、x_3 的取值 1、1、1。因此，这一 296
博弈的特征函数是：

$$(35{:}1)\quad \text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}0\\1\\2 & (\text{且 4 属于 } S)\\2 & (\text{且 4 不属于 } S)\\3\\4\end{cases}\text{个元素时，}\mathrm{v}(S)=\begin{cases}0\\-1\\2\\-2\\1\\0\end{cases}$$

① 在群论中，尤其在晶体学中，这组运动十分注明，我们不做进一步讨论。——295，②

[借助34.2.1中的(34:1)、(34:2)、(34:3),可直接验证。]我们不用第6章中的数学理论,让我们首先看一下它是否允许一个符合直觉的解释。

首先要看到的是,被独自撇下的一位玩家将损失数额-1。这显然是能够发生在他身上的最糟糕的事情,因为不用别人帮助他也能够防止自己遭受更大损失。[①] 因此,我们可以视得到这一数额的一位玩家彻底失败了。如果两位玩家的一个联盟得到了数额-2,那么,可以视其为彻底失败了,因为其中的每位玩家必定得到数额-1。[②③] 在这一博弈中,从这个意义上说,任何两位玩家的联盟如果没有包括玩家4都是失败的。

让我们转向补集。如果一个联盟在上述意义上是失败的,我们有理由认为其补集是一个胜利联盟。因此,包括玩家4的二元集必定是一个胜利联盟。再有,由于任何孤立的玩家都必定被视为失败的,三人联盟总是胜利的。对于包括玩家4的三人联盟来说,这是无关紧要的,因为在这些联盟中,包括玩家4的二人就能够取胜。但是,基本的一点是,1,2,3是一个胜利联盟,因为其真子集都是

---

① 这一观点由我们在23和32.2中关于三人博弈的结果,更基本地由我们在30.1.1中给出的分配的定义,尤其是条件(30:1)详细说明。——296,①

② 因为他和他的同伙都不可能得到少于-1的数额,当它们总共得到数额-2时,每人-1是惟一的分配方式。——296,②

③ 用31.1.4的术语:这一联盟是平的。当然,不存在联盟收益,从而,两位玩家不可能有建立这样一个联盟的动机。但是,如果两位玩家恰巧结合起来了,且无吸收第三个同伙的愿望,那么,我们可以把剩下的两位玩家看作一个联盟。——296,③

失败的。①

35.1.2 显然，这是争取加入下面的任何一个联盟的争斗： 297

(35:2)　　(1,4),(2,4),(3,4),(1,2,3),

这些联盟能够得到的数额分别是

(35:3)　v[(1,4)]=v[(2,4)]=v[(3,4)]=2,v[(1,2,3)]=1。

要看到，这十分类似于我们在本质三人零和博弈中看到的情况，其中胜利联盟是：

(35:2*)　　(1,2),(1,3),(2,3),

且这些联盟能够得到的数额分别是：

(35:3*)　　v[(1,2)]=v[(1,3)]=v[(2,3)]=1。

在三人博弈中，我们借助如下假设确定(35:3*)中成果在赢家中间的分配：一个胜利联盟中的一位玩家应该得到相同数额，无所谓他进入哪一个胜利联盟。对于玩家1、2、3来说，记这些数额为α、β、γ,(35:3*)给出

(35:4*)　　$\alpha+\beta=\alpha+\gamma=\beta+\gamma=1$,

由此得，

---

① 我们要敬告读者的是，我们把"失败"和"胜利"当作专门术语使用。这并非我们的意图。这些概念事实上十分适合严格处理。"失败"和"胜利"联盟实际上与31.1.5中的(31:F)和(31:G)中考虑的集合S一致，分别对应于S是平集的和$-S$是平集。但是，我们将在第10章中以这种方式考虑这一问题。

暂时地，我们的分析完全是启发性的，应该采取第21和22节中关于三人零和博弈分析的精神。惟一的差别是，我们接下来的讨论将更为简要，因为我们在过去的讨论中积累了大量经验和传统做法。

由于我们已经有了严格的有关博弈的解的理论，我们应该通过机遇数学理论的严格分析进行这一初步的启发性分析。(见上，以及36.2.3开头。)——296,④

(35:5*)　　$\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}$。

这些的确是那些分析得出的值。

在我们目前的四人博弈中，让我们假设有同样的原理。用 α、β、γ、δ 分别记玩家 1、2、3、4 加入一个胜利联盟时得到的数额。那么，(35:3)给出

(35:4) $\alpha+\delta=\beta+\delta=\gamma+\delta=2, \alpha+\beta+\gamma+\delta=1$,

由此得

(35:5)　　$\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}, \quad \delta=\frac{5}{3}$。

第 21 节和 22 节中就三人博弈使用的这一富有启发性的方法完全可以照搬过来。①

35.1.3 总结：

298 (35:A)　这是这样一个博弈，其中玩家 4 处于特别有利于取胜的地位：对于他来说，任何联盟都是胜利联盟。没有他的合作，三位玩家联合起来才能取胜。在他是赢家之一时，他的这一优势在玩家 1、2、3、4 应该得到的数额中也有所表现。如果我们的上述演绎可靠的话，这些数额分别是 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{5}{3}$。需要指出的是，玩家 4 的优势特指胜利情况下的优势；失败时，所有玩家地位相同（即得到 −1）。

当然，最后提到的情形归于我们通过简化而实现的正

---

① 当然，这并不意味着是以 30.1 为基础的严格讨论。——297，①

规化。然而，与任何正规化无关，这一博弈表现出如下特点：同是赢家的一位玩家超过另一位玩家的数量优势可以不同于同是输家时这位玩家较另一位玩家的数量优势。

22.3.4 的总结表明，在三人博弈中，这不可能发生。因此，我们得到了参与者个数达到 4 时出现的新的因素的第一个迹象。

35.1.4　最后，在这一博弈中，玩家 4 的策略优势是这样一个事实，即他只需一个盟友就能够取得胜利，但是没有他的参与，三位玩家联盟起来才能取得胜利。你也许试图过渡到一个更为极端的情况，即构造这样一个博弈，其中不包含玩家 4 的任何联盟都是失败联盟。必须看到，事情并非如此，或者说这样一个优势不再是策略优势。事实上，在这样一个博弈中，

$$\text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}0\\1\\2\\3\end{cases}\text{个元素且 4 不属于 } S \text{ 时，} v(S)=\begin{cases}0\\-1\\-2\\-3\end{cases}\text{。}$$

由此，

$$\text{如果 } S \text{ 有}\begin{cases}1\\2\\3\\4\end{cases}\text{个元素且 4 属于 } S\text{，那么，} v(S)=\begin{cases}3\\2\\1\\0\end{cases}\text{。}$$

这不是简化型，因为

$$v[(1)]=v[(2)]=v[(3)]=-1, v[(4)]=3。$$

如果我们把 27.1.4 的简化程序应用于这个 $v(S)$，那么，我们发现，其简化型是

$$\bar{v}(S)=0,$$

即该博弈是非本质博弈。[这不可以由 27.4 中的(27:B)直接证明。]因此,对于玩家 1、2、3、4 中的每一位来说,这个都有惟一确定的值,这些值分别是 -1、-1、-1、3。

换句话说,在这个博弈中,玩家 4 的优势是一个固定数额(现金)支付,而不是一个策略优势。前者自然较后者确定且是可见的,但其在理论上却不那么有意义,因为它可以通过我们的简化过程被消除。

299 **35.1.5** 我们在本节的开头看到,隅角 V、VI 和 VII 与隅角 I 的不同仅仅在于玩家排列的不同。不难证明,I 中玩家 4 的特殊地位分别由 V、VI、VII 中的玩家 1、2、3 享有。

35.2 隅角 VIII(和 II、III、IV)

35.2.1 我们接下来考虑的博弈对应着四个隅角①:II、III、IV、VIII。由于它们相互得自玩家 1、2、3、4 的适当置换,只需考虑其中之一,如 VIII。

点 VIII 对应着坐标 x_1、x_2、x_3 的取值 -1、-1、-1。因此,这个博弈的特征函数是:

$$(35{:}6)\quad \text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}0\\1\\2\quad(\text{且 4 属于 } S)\\2\quad(\text{且 4 不属于 } S)\\3\\4\end{cases}\text{个元素时,}v(S)=\begin{cases}0\\-1\\-2\\2\\1\\0\end{cases}。$$

[这可借助 34.2.1 中的(34:1)、(34:2)和(34:3)直接得

到验证。]

让我们再次首先看一看它是否允许一个符合直觉的解释，而不应用第 6 章中的数学理论。

这一博弈的一个重要特点是，25.3 中的不等式(25:3:c)变成了等式，即当 $T=(4)$ 时，

(35:7)　　如 $S\cap T=\ominus$，那么，$v(S\cup T)=v(S)+v(T)$。

也就是说：如果 S 代表一个不包含玩家 4 的联盟，那么，玩家 4 加入这个联盟并不带来优势，它既不影响这个联盟的策略局面，也不影响其对手的策略局面。这显然是(35:7)所表达的可加性的含义。[1]

35.2.2 这种情况暗示着下面的结论。当然，这纯粹是试探性的。[2] 由于玩家 4 加入任何联盟对双方来说都是 300
完全无所谓的事情，显然，我们可以假设玩家 4 在组成该博弈的策略的交易中并不起作用。他被与其他玩家隔离开了，他独自能够得到数额 $v(S)=-1$ 正是对于他来说该博弈的值。另一方面，其他玩家 1、2、3 严格地在他们中间进行这一博弈。因此，他们是在进行一个三人博弈。描

---

① 注意，取得玩家 4 的合作是无所谓的，这表达为(35:7)，而不表达为

$$v(S\cup T)=v(S)。$$

也就是说，我们说一个玩家是一个"无所谓的"同伙，不是说他的加入不改变联盟的值，而是说他给这个联盟增加的数额恰好等于他在这个联盟之外的所值数额。

这一说明看似无足轻重，但存在着误解的危险，尤其在没有被简化的博弈中，其中 $v[(4)]>0$，即玩家 4 的加入(尽管其在策略上无所谓！)的确增加联盟的值。

还要看到，S 与 $T=(4)$ 之间相互无所谓是一个严格的交互关系。——299，①

② 我们将在后面给出以 30.1 为基础的严格讨论。到那时，你还会发现，所有这些博弈都是有一定重要性的较一般博弈的特例。(见第 9 章，特别是 41.2。)——299，②

述最初三人博弈的特征函数 v(S) 的值是：

$$
(35{:}6^{*})\qquad \left.\begin{aligned} &v(\ominus)=0,\\ &v[(1)]=v[(2)]=v[(3)]=-1,\\ &v[(1,2)]=v[(1,3)]=v[(2,3)]=2,\\ &v[(1,2,3)]=1,\end{aligned}\right\} I'=(1,2,3)
$$

是当前全体玩家集。

[从(35:6)出发验证之。]

乍一看，这个三人博弈代表着一件怪事，即 v(I')(I' 是当前全体玩家集！)不等于零。然而，这是完全合理的：通过消除玩家 4，我们把该博弈变成了一个非零和博弈。由于我们给予玩家 4 的值是 -1，其他玩家合起来的值是 1。我们不准备系统研究这一情况(见第 299 页脚注②)。显然，这一条件能够借助 27.1 中使用的变换的略微推广来修改。我们修改玩家 1、2、3 的博弈，假设其每人以现金的方式事先得到$\frac{1}{3}$，然后，从(35:6*)中 v(S) 的值中减去同样一个数额以抵消这一做法。正如 27.1 中表明的那样，这不会影响该博弈的策略，即它生产一个策略等价的博弈。①

① 用 27.1.1 的术语：$\alpha_1^0=\alpha_2^0=\alpha_3^0=-\frac{1}{3}$。我们已经违背那里的条件(27:1)：$\sum_i \alpha_i^0=0$。这是必要的，因为我们是从一个非零和博弈开始的。

如果我们把玩家 4 考虑进去，令 $\alpha_4^0=1$，我们甚至能够保证 $\sum_i \alpha_i^0=0$。这使他像过去一样孤立，但必要的补偿会使 v[(4)]=0，其结果是显然的。

你能够将此概括为：在当前情况下，在所有策略等价型中，提供最好讨论基础的不是博弈的简化型。——300，①

考虑了上述补偿之后①，我们得到了下述新的特征函数：

$$v'(\ominus)=0,$$

$$v'[(1)]=v'[(2)]=v'[(3)]=-\frac{4}{3},$$

(35:6**)

$$v'[(1,2)]=v'[(1,3)]=v'[(2,3)]=\frac{4}{3},$$

$$v'[(1,2,3)]=0。$$

这是第 32 节中讨论的本质三人零和博弈的简化型，只不过单位有所不同：我们现在有 $\gamma=\frac{4}{3}$，而非 32.1.1 中(32:1)的 $\gamma=1$。因此，我们能够运用 23.1.3 的试探性结果或第 32 节的严格结果。② 无论如何，让我们把自己限制于这样的解，它在两种情况中都出现且是最简单的：32.2.3 的(32:B)。这是 32.2.1 中的分配集(32:6)，我们必须用当前的 $\gamma=\frac{4}{3}$ 去乘它，即 301

$$\{-\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\},\{\frac{2}{3},-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\},\{\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\}。$$

(玩家当然是 1、2、3。)换句话说：玩家 1、2、3 的策略目的是形成任一二人联盟；这方面成功的玩家，即胜利者，将得到 $\frac{2}{3}$，失败的玩家将得到 $-\frac{4}{3}$。现在，我们的最初博弈中

---

① 即 S 有几个元素，就从 $v(S)$ 中减去 $\frac{1}{3}$ 的几倍。——300，②

② 当然，目前的讨论毕竟也是试探性的。关于严格处理，见第 299 页脚注②。——301，①

的玩家 1、2、3 中的每一位得到的数额超过这一数额$\frac{1}{3}$。所以，上述数额$\frac{2}{3}$、$-\frac{4}{3}$必须被分别换成 1、-1。

35.2.3 总结：

(35:B) 在这一博弈中，玩家 4 被排除在所有联盟之外。玩家 1、2、3 的策略目的是结成任何一个二人联盟。玩家 4 总是得到 -1。玩家 1、2、3 中的每一位，当他处于胜利者之列时，得到数额 1；当他失败时，得到数额 -1。所有这些的基础是试探性分析。

我们也可以更准确地说，这个四人博弈只不过是一个“膨胀了的”三人博弈：玩家 1、2、3 的一个本质三人博弈因为“哑的”玩家 4 的加入而膨胀了。我们将在后面看到，这一概念有更一般的意义。（见第 299 页脚注②。）

35.2.4 正如 33.1.2 讨论的那样，我们可以将这一博弈中玩家 4 的哑角色与 32.2.3 中有歧视的解(32:A)中一位玩家遭受的排斥比较。然而，这两个现象之间存在着一个重要区别。在我们当前的结构中，玩家 4 的确不给任何联盟做出贡献；按照特征函数 v(*S*)的性质，玩家 4 是孤立的。我们的试探性分析表明，在所有可接受的解中，他应该被所有联盟排斥在外。我们将在 46.9 中看到，严格理论将证明这一点。从 33.1.2 的意义上说，一个有歧视的解中被排斥的玩家只是在受到考虑的特殊情况中被排斥。一旦考虑这一博弈的特征函数，他

的角色与其他玩家相同。换句话说：在我们当前的博弈中，“哑”玩家是被这一情况的客观事实[特征函数 v(S)]的性质排除的。① 在一个有歧视的解中，被排斥的玩家只是被特殊行为标准（解）所表达的人为（虽然有一定的稳定性）“偏见”排斥了。

我们在这一节的开头看到，隅角 II、III、IV 不同于 VIII，仅仅因为玩家的置换。不难验证，玩家 4 在 VIII 中的特殊角色分别由玩家 1、2、3 享有。 302

35.3　关于 Q 内部的点及其说明

35.3.1　让我们考虑这样一个博弈，它对应着 Q 的中心，即坐标 x_1、x_2、x_3 取值 0、0、0。该博弈显然不受玩家 1、2、3、4 的任何置换的影响，即它是对称的。要看到，它是 Q 中惟一一个这样的博弈，因为完全对称性意味着 x_1、x_2、x_3 的所有置换以及其中任何两个的正负号变化（见 34.3）下它都是不变性的。所以，$x_1 = x_2 = x_3 = 0$。

这一博弈的特征函数是：

$$(35:8)\quad \text{当 } S \text{ 有}\begin{cases}0\\1\\2\\3\\4\end{cases}\text{个元素时，v}(S)=\begin{cases}0\\-1\\0\\1\\0\end{cases}。$$

[这可借助 34.2.1 中的（34:1）、（34:2）和（34:3）直接得到验证。]该博弈的严格解为数众多。事实上，我们必

① 这是 4.6.3 意义上的“物质背景”。——301，②

须说，它们千奇百怪。通过严格理论的一致运用对其进行令人满意的排序并将其系统化尚不可能。不过，已有的材料提供了一些对该理论的一些分支的真知灼见。我们将在第 37 节和第 38 节中较详细地考虑它们。

这里，我们仅仅做出如下（试探性）的说明：这一（完全）对称博弈的概念显然是，玩家的多数结成的联盟（即三人联盟）将胜利，和局的情况下（即形成两个联盟，每个联盟中有两位玩家），不存在支付。

35.3.2 Q 的中心代表着我们这一结构中惟一一个对玩家 1、2、3、4 的所有置换（完全）对称的博弈。几何图式还暗示着另一种对称性：即对坐标 x_1、x_2、x_3 的所有置换的对称性。以这种方式，我们选择 Q 中满足如下条件的点：

(35:9) $$x_1 = x_2 = x_3,$$

它们形成 Q 的一个主对角线，直线

(35:10) I—中心—VIII。

我们在 34.3.1 的开头看到，这一对称性恰恰意味着，该博弈是对玩家 1、2、3 的置换来说保持不变的。换句话说：

303 主对角线(35:9)和(35:10)代表着所有这样的博弈，这些博弈对于玩家 1、2、3 来说是对称的，即只有玩家 4 的角色特殊。

Q 还有另外三条主对角线（II—中心—V，III—中心—VI，IV—中心—VII），它们显然对应着这样的博弈，其中，另外一位玩家（玩家 1、2、3）有一个特殊角色。

让我们回到主对角线(35:9)和(35:10)。我们在前

面考虑过的三个博弈(I、VIII 和中心)在这条线上。事实上,在所有这些博弈中,只有玩家4有一个特殊角色。[①] 要看到,全部这类博弈是一个单参数族。根据(35:9),这样一个博弈由值 x_1 描述,x_1 满足

(35:11)　　$-1 \leqq x_1 \leqq 1$。

上面提到的三个博弈对应着极端值 $x_1 = 1$、$x = -1$ 和中点值 $x_1 = 0$。为了深入理解严格理论的作用,我们要确定 x_1 的这些值的严格解,然后弄明白这些解如何随 x_1 沿着直线(35:10)连续变化而变化。尤其具有指导意义的是找出就特殊值 $x_1 = -1, 0, 1$ 识别的、性质上不同种类的解之间,一个如何变成另一个。我们将在36.3.2中给出有关现在能够得到的这方面的信息的说明。

35.3.3 另一个有意思的问题是:考虑这样一个博弈,即 Q 中的一个点,其中我们能够就预期会有什么解建立某种符合直觉的图形,如隅角 VIII。然后,我们考虑一个位于 VIII 的邻近的一个博弈,即对 x_1、x_2、x_3 略作改动。现在,我们希望找出这些邻近的博弈的严格解,并发现它们与最初的博弈有什么样的细节上的不同,即 x_1、x_2、x_3 的小的变动如何改变解。[②] 这一问题的特殊情况将在36.1.2、37.1.1末尾和38.2.7中考虑。

35.3.4 至此,我们已经考虑了 Q 的具有一定特殊位置的点所代表的博弈。[③] 当点 X 是 Q 内的某个地方,具有

---

① 在中心点,他也没有特殊角色。——303,①

② 这是数学物理中熟知的方法,其中它被用于解决一时无法直接一般地解决的问题:它是扰动分析。——303,②

③ 隅角、中心和整个主对角线。——303,③

“一般性”的位置——即在一个没有突出性质的点——时，更一般的典型问题就会产生。

现在，你也许会想到如下富有启发性的分析思路。我们对隅角 I—VIII 有了一些试探性的认识（见 35.1 和 35.2）。Q 的任何一点 X 以某种方式被这些隅角“包围”着。更确切地说，如果使用适当的权重，它是它们的重心。
304 因此，你可以猜到，由 X 代表的这些博弈的策略是由 I—VIII 代表的（较熟悉的）博弈的策略的某种组合。你甚至可以希望，这个“组合”从某种意义上说类似于将 X 与 I—VIII 联系在一起的重心的形成。[1]

我们将在 36.3.2 和 38.2.5 中看到，这只对 Q 的有限部分是正确，肯定不是对整个 Q 正确。实际上，在 Q 的特定内部区域发生的事情定性地不同于 I—VIII 的表现。所有这些都趋于表明，在研究涉及策略的概念或做出有关它

---

① 考虑 Q 中的两个点 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ 和 $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$。我们可以把两个点看作 L_3 中的两个向量。事实上我们正是在这个意义上理解重心的形成 $tX+(1-t)Y=\{tx_1+(1-t)y_1, tx_2+(1-t)y_2, tx_3+(1-t)y_3\}$。［见 16.2.1 中的（16:A:c）。］

那么，如果 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ 和 $Y=\{y_1,y_2,y_3\}$ 定义 34.2.1 中（34:1）—（34:3）意义上的特征函数 $\mathrm{v}(S)$ 和 $\mathrm{w}(S)$，那么，$tX+(1-t)Y$ 将以相同算法给出一个特征函数

$$\mathrm{u}(S)\equiv t\mathrm{v}(S)+(1-t)\mathrm{w}(S)。$$

（通过研究上面提到的公式，这一关系不难得到验证。）而且，同一个 $\mathrm{u}(S)$ 已经在 27.6.3 中的（27:10）中作为 $\mathrm{v}(S)$ 和 $\mathrm{w}(S)$ 的重心被引入了。

因此，这里的分析与 27.6 的分析是一致的。我们现在要对付的是两个以上点（8 个：I—VIII）的重心，而不是两个点的重心。这并非本质的东西：前一种运算能够通过后者的重复来得到。

根据这些说明，后面提到的困难与 27.6.3 有一个直接的关系，这是我们在那里指出过的。——304，①

们的猜想时，我们要极为小心。数学方法目前还很不成熟，我们要在这方面获得自信，尚需更多经验。

36. 主对角线讨论

36.1　隅角 VIII 的邻近：试探性讨论

36.1.1　四人博弈的系统理论尚未发展到对 Q 的任意点所代表的博弈给出全部解。我们甚至不能为每一个这样的博弈指定一个解。我们的研究只成功确定了 Q 的某些特定部分的解（有时一个，有时多个）。仅仅就 I—VIII 这 8 个点，我们完成了解的完全列举。目前，在 Q 中，解完全知道的部分形成一组具有偶然性的直线的、平面的和空间的区域。它们分布于 Q 的各个地方，但又没有完全填满它。

借助第 9 章和第 10 章的结果，对于隅角 I—VIII 来说，解的穷举很容易完成，在那里，这些博弈将被归入一般博弈的一个更大的分类。目前，我们将把自己限制于决疑法（casuistic），这一方法描述的是已知情况中 305
的特殊解。详细描述这些研究的现状[①]基本上无助于我们这里的讨论，而且会占用很大篇幅。我们将仅仅给出某些例子。我们希望这些例子有助于我们的讨论。

① 我们两人之一将在随后的数学刊物中完成这一工作。——305，①

36.1.2 我们首先考虑 Q 中主对角线 I—中心—VIII 上邻近其末端 VIII，$x_1 = x_2 = x_3 = -1$（见 35.3.3）的条件，而且，我们将力图推广到 $x_1 = x_2 = x_3 > -1$（见图 63）。在这条对角线上，

$$(36{:}1)\quad \text{当 } S \text{ 有}\begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 & (\text{且 } 4 \text{ 属于 } S) \\ 2 & (\text{且 } 4 \text{ 不属于 } S) \\ 3 \\ 4 \end{cases}\text{个元素时}, \mathrm{v}(S) = \begin{cases} 0 \\ -1 \\ 2x_1 \\ -2x_1 \\ 1 \\ 0 \end{cases}。$$

[要看到，对于 $x_1 = 1$，这给出 35.1.1 中的(35:1)；对于 $x_1 = -1$，这给出 35.2.1 中的(35:6)。]我们假设 $x_1 > -1$，但大得不太多，具体大多少才合适将在后面说明。让我们首先试探性地分析这种情况。

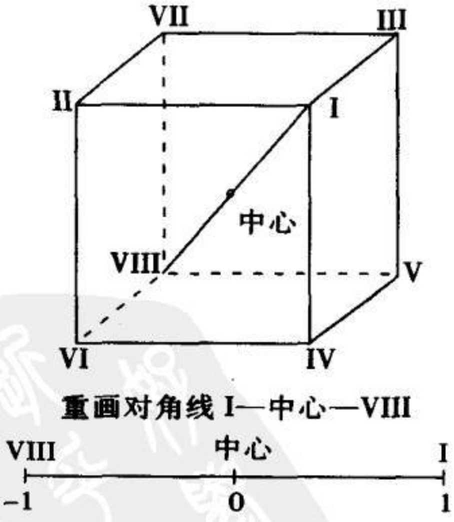


图 63

由于我们假设 x_1 离开 -1 不太远，35.2 的讨论仍然有一些指导意义。1、2、3 中两位玩家结成一个联盟也许是最重要的策略目的，但它不再是惟一的目的：当 $T=(4)$ 时[①]，35.2.1 的公式(35:7)是不正确的，而是 306

(36:2) 当 $S\cap T=\ominus$ 时， $v(S\cup T)>v(S)+v(S)$。

事实上，不难从(36:1)验证，这一额外数额总是 $2(1+x_1)$。[②] 对于 $x_1=-1$，它等于零，但我们有 x_1 略微 >-1，所以该表达式略微 >0。要看到，对于原先的两位玩家的联盟来说，而不是都与玩家 4 的来说，根据(36:1)、(36:2)中的额外数额[③]总是等于 $2(1-x_1)$。对于 $x_1=-1$，它等于 4；由于我们有 x_1 略微 >-1，它只是略微 <4。

因此，(不包含玩家 4 的两个玩家的)第一联盟较(包含玩家 4)其他联盟更牢固。不过，后者也是不容忽视的。由于第一联盟是一个牢固的联盟，我们可以猜想，它将首先形成，而且它一旦形成，它将作为一个玩家与其他玩家打交道。然后，作为最终结果，某些类型的三人联盟的形成也是预料之中的事情。

36.1.3 例如，以(1,2)作为"第一"联盟，猜测中的三人博弈是玩家(1,2)、3、4 之间的博弈。[④] 在这一博弈中，23.1 的 a、b、c 是 $a=v[(3,4)]=2x_1$、$b=v[(1,2,4)]=$

---

① 除非 $S=\ominus$ 或 $-T$，在这种情况下，(36:2)中总有一个 =。即，在当前情况中，S 必定有一个或两个元素。——306，①

② 根据上面脚注①，S 有一个或两个元素，且它不包含 4。——306，②

③ 即，现在的 S、T 是两个一元集，不包含玩家 4。——306，③

④ 你可以说，(1,2)是一个虚构的人，而 3、4 是自然人。——306，④

1、$c = \mathrm{v}[(1,2,3)] = 1$。① 因此,如果我们可以应用 23.1 中的结果(所有这些都是极为富有启发性的!),玩家(1,2)如果成功(加入最后联盟),那么,它得到的数额是 $\alpha = \frac{-a+b+c}{2} = 1 - x_1$;如果失败了,那么它得到数额 $-a = -2x_1$。如果成功了,玩家 3 得到的数额是 $\beta = \frac{a-b+c}{2} = x_1$;如果失败了,那么,它得到数额 $-a = -2x_1$。成功时,玩家 4 得到数额 $\gamma = \frac{a+b-c}{2} = x_1$;失败时,$-c = -1$。

与(1,2)一样,由于"第一"联盟(1,3)、(2,3)也可以形成,所以像(第 21—22 节中)关于三人博弈的讨论那样,我们有同样的理由期望这些联盟的合伙人将平分收益。因此,当这样一个联盟取得成功时,其成员预计会每人得到 $\frac{1-x_1}{2}$,失败时,每人得到 x_1。

36.1.4 总结:如果这些猜想得到证明,那么,将会出现的局面是:

307 如果"第一"联盟是(1,2),而且它成功找到一位盟友,如果与其形成最终联盟的是玩家 3,那么,玩家 1、2、3、4 分别得到数额 $\frac{1-x_1}{2}$、$\frac{1-x_1}{2}$、x_1、-1。如果加入最终联盟的是玩家 4,那么,这些数额分别是 $\frac{1-x_1}{2}$、$\frac{1-x_1}{2}$、

① 请牢记,在下面的所有公式中,x_1 接近于 -1,即它是负,因此 $-x_1$ 是收益,而 x_1 是损失。——306,⑤

-1、x_1。如果"第一"联盟(1,2)是不成功的,即玩家 3、4 与其作对,那么,这些玩家分别得到数额 $-x_1$、$-x_1$、x_1、x_1。

如果"第一"联盟是(1,3)或(2,3),那么,我们必须对上述结果做相应玩家置换。

36.2 隅角 VII 的邻近:严格讨论

36.2.1 下面,我们要严格审查上面的试探性讨论。上述试探性讨论明显对应着如下猜测:

令 V 是如下分配集:

(36:3)
$$\overrightarrow{\alpha'} = \left\{\frac{1-x_1}{2}, \frac{1-x_1}{2}, x_1, -1\right\}$$
$$\overrightarrow{\alpha''} = \left\{\frac{1-x_1}{2}, \frac{1-x_1}{2}, -1, x_1\right\}$$
$$\overrightarrow{\alpha'''} = \{-x_1, -x_1, x_1, x_1\}$$

和通过玩家(即分量)1、2、3 的置换得到的分配。

(见 306 页脚注⑤。)我们预料,如果 x_1 近似等于 -1,那么,这个 V 是 30.1 的严格意义上的一个解,而且我们必须确定这是否成立,以及在 x_1 的什么区间内成立。

这得到了确认并给出如下结果:

(36:A)　　(36:3)的集合 V 是一个解,充分必要条件是

$$-1 \leqq x_1 \leqq -\frac{1}{5}。$$

那么,这就回答了这样一个问题,即($x_1 = -1$ 即隅角 VIII 的)什么范围内,上述试探性讨论导致了一个正确

的结果。[1]

36.2.2 (36:A)的证明没有任何明显的技术困难。

308 它由一系列特殊情况的机械解决组成,且不增加我们对原理性问题的进一步理解。[2] 觉得已经弄明白了的读者可以不阅读这一部分,不会失去这一论述的主线。应该牢记的是(36:A)中的结果陈述。

不过,出于如下理由,我们还是给出全部证明:(36:3)的集合V是通过试探性讨论发现的,即没有使用30.1的严格理论。有待给出的严格证明仅仅以30.1为基础,从而使我们回到惟一令人满意的立足点,严格理论的立足点。对于更好的技术要求来说,试探性讨论只是猜测答案的工具。而且,严格理论的一个幸运之处是,其答案偶然能够以这种方式被猜到。但

---

① 我们想强调的一点是,(36:A)并不断定V是问题中这一博弈(x_1 的特定范围内)的惟一解。然而,有着大量类似地建立起来的集合的努力未能发现 $x \leqq -\frac{1}{5}$[即(36:A)的范围]的解。对于略微 $> -\frac{1}{5}$ 的 x_1[即(36:A)范围稍微外边一点],(36:A)的V不再是一个解,对于取代它的解来说也是如此。见36.3.1中的(36:B)。

当然,正如我们一再讨论过的那样,我们并不怀疑"有歧视"的解总是存在的。但是,它们根本不同于目前考虑的有限解V。

这些论述似乎证明了,解的性质的某种定性变化发生在

对角线I—中心—VIII上的 $x_1 = -\frac{1}{5}$ 处。——307,①

② 读者可以将这一证明与有关二人零和博弈理论中的某些证明进行比较,如16.4与17.6的结合。这样一个证明更清楚,它通常覆盖更多内容,并给出有关这个题目的一些定性阐述以及它与其他数学领域的联系。在这一理论稍后一些的部分中,这样的证明被发现了,如在第46节中。但是,它的大部分仍然处于初级阶段,技术上的不令人满意也是典型的。——308,①

是，这样的猜测必须用严格方法加以验证，或者用严格方法确定在（其中涉及的参数的）什么范围内这一猜测是允许的。

为了使读者能够明确对比这两个过程——启发性的过程和严格过程，我们给出严格证明。

36.2.3 证明如下：

如果 $x_1 = -1$，那么，我们位于隅角 VIII，且(36:3)的解与我们在 35.2.3 中（作为一个解）启发性地引入的集合一致。这能够轻易得到严格证明（见第 299 页脚注②）。所以，我们忽略这种情况并假设

(36:4) $x_1 > -1$。

我们首先证明什么样的集合 $S \subseteq I = (1,2,3,4)$，从 31.1.2 的意义上说，是肯定必要的或肯定不必要的。这是因为，我们要给出的证明正是那里考虑的那种类型的证明。

如下结果是直接的：

(36:5) 根据 31.1.5 中的(31:H)，三元集 S 是肯定必要的，二元集值得怀疑，其他集合则是肯定不必要的。[①]

(36:6) 每当一个二元集是一个肯定必要集，根据 31.1.3 中的(31:C)，我们就可以忽略所有包含它的三元集。

所以，我们接着研究这些二元集。这当然要对(36:3)的集合 V 中的所有 $\vec{\alpha}$ 这么做。

① 这归因于 $n=4$。——308，②

309 首先,考虑与$\overrightarrow{\alpha'}$联系着的二元集 S。[1] 因为 $\alpha_4' = -1$,我们可以根据 31.1.3 中的(31:A)排除 S 包含 4 的可能性。如果 $\alpha_1' + \alpha_2' \leqq v[(1,2)]$,那么,$S=(1,2)$是有效集,即 $1-x_1 \leqq -2x_1$,$x_1 \leqq -1$,根据(36:4),情况并非如此。如果 $\alpha_1' + \alpha_3' \leqq v[(1,3)]$,即 $\frac{1+x_1}{2} \leqq -2x_1$,$x_1 \leqq -\frac{1}{5}$,那么,$S=(1,3)$是有效集。所以,我们假定要满足的条件

$$(36:7) \qquad x_1 \leqq -\frac{1}{5}$$

第一次出现。我们不需要 $S=(2,3)$,因为 1 和 2 在$\overrightarrow{\alpha'}$中起着相同作用(见上面脚注①)。

我们接着转向$\overrightarrow{\alpha''}$。因为 $\alpha_3'' = -1$,我们排除包含 3 的 S(见上)。$S=(1,2)$如前面那样得到解决,因为$\overrightarrow{\alpha'}$,$\overrightarrow{\alpha''}$的这些分量一致。$\alpha_1'' + \alpha_4'' \leqq v[(1,4)]$,即$\frac{1+x_1}{2} \leqq v[(1,4)]$,$x_1$,$\geqq \frac{1}{3}$,那么,$S=(1,4)$是有效集,但根据(36:7),事情并非如此。以相同方式,$S=(2,4)$被丢弃。

最后,我们考虑$\overrightarrow{\alpha'''}$。$S=(1,2)$是有效集:$\alpha'''_1 + \alpha_2''' = v[(1,2)]$,即 $-2x_1 = -2x_1$。$S=(1,3)$不必考虑,理由是:我们正在就$\overrightarrow{\alpha'''}$考虑 $S=(1,2)$,如果我们对换玩家 2 和 3

---

① 这里,以及在随后的讨论中,我们将如(36:3)中说明的那样自由使用玩家 1、2、3 的置换,以缩短篇幅。因此,读者必须把 1、2、3 的这些置换运用于我们的结果。——309,①

（见上面脚注①），这种情况就变成了(1,3)，其分量分别是 $-x_1$、$-x_1$。关于有分量 $-x_1$、x_1 的 $\overrightarrow{\alpha'''}$，31.1.3 中的(31:B)使得我们最初的 $S=(1,3)$ 是不必要的，因为 $-x_1 \geqq x_1$。同样，$S=(2,3)$ 被忽略。如果 $\alpha_1''' + \alpha_4''' \leqq \mathrm{v}[(1,4)]$，即 $0 \leqq 2x_1$，$x_1 \geqq 0$，那么，$S=(1,4)$ 是有效集，但根据(36:7)，情况并非如此。同样，$S=(2,4)$ 被丢弃。$S=(3,4)$ 是有效集：$\alpha_3''' + \alpha_4''' = \mathrm{v}[(3,4)]$，即 $2x_1 = 2x_1$。

总之：

(36:8)　　下述三个二元集是肯定必要集，且其他的都是肯定不必要集：

对于 $\overrightarrow{\alpha'}$ 来说的(1,3)，对于 $\overrightarrow{\alpha'''}$ 来说的(1,2)和(3,4)。

考虑三元集 S：由 31.1.3 中的(31:A)，我们可以排除对于 $\overrightarrow{\alpha'}$ 来说的包含 4 和对于 $\overrightarrow{\alpha''}$ 来说的包含 3 的那些三元集。因此，只剩下对于 $\overrightarrow{\alpha'}$ 来说的(1,2,3)和对于 $\overrightarrow{\alpha''}$ 来说的(1,2,4)。其中，前者被(36:6)排除了，因为它包含(36:8)的集合(1,3)。对于 $\overrightarrow{\alpha'''}$ 来说，每个三元集都包含(36:8)的集合 310
(1,2)或集合(3,4)。因此，我们可以根据(36:6)排除之。

总之：

(36:9)　　下述三元集是肯定必要集，且所有其他三元集都是肯定不必要集：①

关于 $\overrightarrow{\alpha''}$ 的(1,2,4)。

---

① 根据(36:5)，每个三元集都是肯定必要集，这是第 274 页脚注①末尾提到的现象的另一个例子。——310，①

36.2.4 下面，我们验证30.1.1中的(30:5:a)，即V中不存在一个$\vec{\alpha}$占优V中的任何$\vec{\beta}$。

$\vec{\alpha}=\overrightarrow{\alpha'}$：由(36:8)和(36:9)，我们必须用集合$S=(1,3)$。$\overrightarrow{\alpha'}$能够用这个$S$占优$\overrightarrow{\alpha'}$、$\overrightarrow{\alpha''}$或$\overrightarrow{\alpha'''}$的任意1、2、3置换吗？这首先要求受到考虑的分配的1、2、3分量中有一个$<x_1$(这是$\overrightarrow{\alpha'}$的分量3)。因此，$\overrightarrow{\alpha'}$和$\overrightarrow{\alpha'''}$被排除了。[①] 甚至在$\overrightarrow{\alpha''}$中，1、2分量也被排除了(见脚注②)，但第3个分量将满足这一要求。但是，分配$\overrightarrow{\alpha''}$的1、2、3分量中的另一个必须$<\frac{1-x_1}{2}$(这是$\overrightarrow{\alpha'}$的第一个分量)，情况并非如此。$\overrightarrow{\alpha''}$的1、2分量都$=\frac{1-x_1}{2}$。

$\vec{\alpha}=\overrightarrow{\alpha''}$：由(36:8)和(36:9)，我们必须用集合$S=(1,2,4)$。$\overrightarrow{\alpha''}$能够用这个$S$占优$\overrightarrow{\alpha'}$、$\overrightarrow{\alpha''}$或$\overrightarrow{\alpha'''}$的任意1、2、3置换吗？这首先要求，考虑中的分配的第4个分量$<x_1$(这是$\overrightarrow{\alpha''}$的第4个分量)。因此，$\overrightarrow{\alpha''}$、$\overrightarrow{\alpha'''}$被排除了。对于$\overrightarrow{\alpha'}$，我们还必须要求其1、2、3分量中的两个$<\frac{1-x_1}{2}$(这是$\overrightarrow{\alpha''}$的1、2分量)，情况并非如此，这些分量中只有一个$\neq\frac{1-x_1}{2}$。

$\vec{\alpha}=\overrightarrow{\alpha'''}$：由(36:8)和(36:9)，我们必须用集合$S=(1,2)$，然后是$S=(3,4)$。$S=(1,2)$：$\overrightarrow{\alpha'''}$能够像上面描述的那样用这个$S$占优吗？这要求，这一分配的1、2、3分量中

---

① 事实上，$\frac{1-x_1}{2}\geqq x_1$，即$x_1\leqq\frac{1}{3}$且$-x_1\geqq x_1$，即$x_1\leqq 0$——两者都得自(36:7)。——310，②

存在两个分量 $< -x_1$（这是$\overrightarrow{\alpha'''}$的第 1 和第 2 个分量）。情况并非如此，因为这些分量中只有一个 $\neq -x_1$。对于$\overrightarrow{\alpha'}$或 311
$\overrightarrow{\alpha''}$来说，情况也并非如此，因为这些分量中只有一个 $\neq \frac{1-x_1}{2}$。① $S=(3,4)$：$\overrightarrow{\alpha'''}$能够用这个 S 像上面描述的那样占优吗？这首先要求，这个分配的第 4 个分量 $< x_1$（这是$\overrightarrow{\alpha'''}$的第 4 个分量）。因此，$\overrightarrow{\alpha''}$和$\overrightarrow{\alpha'''}$被排除了。对于$\overrightarrow{\alpha'}$，我们还必须进一步要求其 1、2、3 分量中存在一个分量 $< x_1$（这是$\overrightarrow{\alpha'''}$的第 3 个分量），情况并非如此。所有这些分量都 $\geqq x_1$（见第 310 页脚注②）。

(30:5:a)的证明完成。

36.2.5　接下来，我们证明 30.1.1 中的(30:5:b)，即不被 V 中元素占优的 $\vec{\beta}$ 必定属于 V。

考虑不被 V 中元素占优的一个 $\vec{\beta}$。首先，假设 $\beta_4 < x_1$。如果 β_1、β_2、β_3 中任一个都 $< x_1$，我们就能够通过置换 1、2、3 做到 $\beta_3 < x_1$。这给出，用(36:8)中的 $S=(3,4)$，$\overrightarrow{\alpha'''} \succ \vec{\beta}$。因此，

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geqq x_1。$$

如果 β_1、β_2、β_3 中任意两个 $< \frac{1-x_1}{2}$，我们就能够通过置换 1、2、3 做到 $\beta_1, \beta_2 < \frac{1-x_1}{2}$。这给出，用(36:9)的 $S=(1,2,$ 312

---

① 且 $\frac{1-x_1}{2} \geqq -x_1$，即 $x_1 \geqq -1$。——311，①

4)，$\overrightarrow{\alpha'''} \succ \overrightarrow{\beta}$。所以，$\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$ 中至多有一个 $< \frac{1-x_1}{2}$，即其中两个 $\geq \frac{1-x_1}{2}$。通过置换 1、2、3，我们能够做到

$$\beta_1, \beta_2 \geq \frac{1-x_1}{2}。$$

显然，$\beta_4 \geq -1$。因此，$\overrightarrow{\beta}$ 的每个分量都 $\geq \overrightarrow{\alpha'}$ 相应分量，加之两者都是分配[①]，所以它们是一致的，并属于 V。

接下来，假设 $\beta_4 \geq x_1$。如果 β_1、β_2、β_3 中任意两个 $< -x_1$，我们就能够通过置换 1、2、3 使 β_1、$\beta_2 < -x_1$。这给出，用(36:8)的 $S=(1,2)$，$\overrightarrow{\alpha'''} \succ \overrightarrow{\beta}$。因此，$\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$ 中至多有一个 $< -x_1$，即其中两个 $\geq -x_1$。通过置换 1、2、3，我们能够做到：

$$\beta_1, \beta_2 \geq -x_1。$$

如果 $\beta_3 \geq -x_1$，那么，所有这些意味着，$\overrightarrow{\beta}$ 的每个分量都 $\geq \overrightarrow{\alpha'''}$ 的相应分量，加之它们都是分配(见第 311 页脚注②)，所以它们一致：$\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\alpha''}$，且属于 V。

进而假设 $\beta_3 < x_1$。如果 β_1、β_2 之一 $< \frac{1-x_1}{2}$，我们就能够通过置换 1、2 使 $\beta_1 < \frac{1-x_1}{2}$。这给出，用(36:8)的 $S=(1,3)$，$\overrightarrow{\alpha'} \succ \overrightarrow{\beta}$。所以，

$$\beta_1, \beta_2 \geq \frac{1-x_1}{2}。$$

---

① 所以其分量的和都等于零。——311，②

显然，$\beta_3 \geqq -1$。因此，$\vec{\beta}$ 的每个分量 $\geqq \overrightarrow{\alpha''}$ 的相应分量，加之它们都是分配（见第 311 页脚注②），所以它们一致：$\vec{\beta} = \overrightarrow{\alpha''}$，且属于 V。

(30:5:b)的证明完成。[①]

这样，我们就证明了准则(36:A)。[②]

36.3　主对角线的其余部分

36.3.1　当 x_1 超出 36.2.1 的区域(36:A)时，即当它跨过其边界 $x_1 = -\frac{1}{5}$ 时，那么，(36:3)的 V 不再是一个解。实际上，我们有可能在 $x_1 > -\frac{1}{5}$（邻近 $-\frac{1}{5}$）的某一特定区域内找到一个解，为此，给(36:3)的 V 添加如下分配

(36:10)　　$\overrightarrow{\alpha'''} = \left\{\frac{1-x_1}{2}, -x_1, \frac{-1+x_1}{2}, x_1\right\}$ 和(36:3)中那样的置换。[③]

严格说：

(36:B)　　(36:3)和(36:10)的集合 V 是一个解，当且

---

① 读者将会看到，在这一分析过程中，(36:8)和(36:9)的所有集合都为了占优而得到了使用，$\vec{\beta}$ 不得不逐个等于(36:3)的 $\overrightarrow{\alpha'}$、$\overrightarrow{\alpha''}$、$\overrightarrow{\alpha'''}$。——312，①

② 关于 $x_1 = -1$，见这一证明开头的说明。——312，②

③ 审视上述证明告诉我们，当 x_1 变得 $> -\frac{1}{5}$ 时，这变得不正确了：集合 $S = (1,3)$［以及(2,3)］不再是对于 $\overrightarrow{\alpha'}$ 来说的有效集。当然，这不改变三元集(1,2,3)性质，它被排除仅仅是因为(1,3)［和(2,3)］被包含在其中。

因此，被 V 的 $\overrightarrow{\alpha'}$ 这样一个元素占优变得更为困难了，而且预料之中的事情是，集合 V 的变大是解的寻找中必须考虑到的事情。——312，③

仅当 $-\frac{1}{5}<x_1\leqq 0$。①

313 (36:B)的证明与上面给出的(36:A)的证明属同一类型，我们不打算在这里讨论。

区域(36:A)和(36:B)穷尽了整个可行区间 $-1\leqq x_1\leqq 1$ 的 $x_1\leqq 0$ 的部分，即对角线 VIII—中心—I 的从 VIII 到中心的那一半。

36.3.2 本质上类似于 36.2.1 的(36:A)和 36.3.1 的(36:B)中描述的 V 的解也曾经在 $x_1>0$ 的一边——即该对角线的从中心到 I 的那一半——发现过。在这一半，与(36:A)和(36:B)所包括的那一半中同类性质的变化也发生了。实际上，存在着三个这样的区间，它们是

(36:C) $\qquad 0\leqq x_1<\frac{1}{9}$，

(36:D) $\qquad \frac{1}{9}<x_1\leqq\frac{1}{3}$，

(36:E) $\qquad \frac{1}{3}\leqq x_1\leqq 1$。

(见图 64，并将其与图 63 比较。)

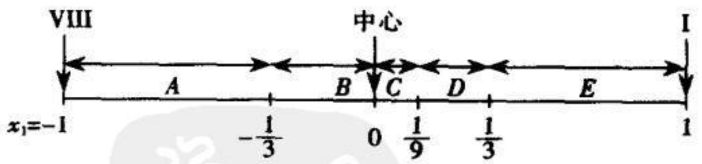


图 64

① 要看到，$x_1=-\frac{1}{5}$处的不连续性，而$-\frac{1}{5}$属于(36:A)而不属于(36:B)！即便是在这样的问题上，该理论也是十分明确的。——312，④

我们不准备讨论有关（36:C）、（36:D）和（36:E）的解。[1]

不过，读者也许会注意到：$x_1=0$ 看似同时属于相邻的区域（36:B）和（36:C），而且与之类似，$x_1=\frac{1}{3}$同时属于（36:D）和（36:E）。这是因为，相应解 V 的仔细研究表明，虽然 V 的性质的变化发生在 $x_1=0$ 和$\frac{1}{3}$，但这些变化并不是不连续的。

另一方面，$x_1=\frac{1}{9}$属于与（36:C）和（36:D）都不相邻的区域。在这两个区域中成立的解 V 在 $x_1=\frac{1}{9}$处都不可用。事实上，该点处的条件尚未得到充分说明。

37. 中心及其周围

37.1　中心周围情况概述

37.1.1　上一节的分析被限制于立方体 Q 的一个一维子集：对角线 VIII—中心—I。正如 34.3 中描述的那样，通过玩家 1、2、3、4 的置换，我们能够说明 Q 的四条主对角线。借助与上一节类似的技术，我们能够沿着 Q 中

① 覆盖这一区域的一部分的另一族解将在 38.2 中讨论。尤其见 38.2.7 和第 328 页脚注②。——313，①

的其他直线寻找解。因此，Q 中存在着一个相当广阔的直线网，这些直线上的解是知道的。我们无意列举它们，尤其因为现在能够得到的信息对应着的仅仅是少量的情况。

314 然而，我们应该这么说：当有待说明是整个三维立方体 Q 时，沿着一条孤立的一维直线寻找解充其量是对问题的初步尝试。如果我们能够找到该立方体的一个三维部分——甚至一个小的部分，对于这些点，相同性质的解能够被使用，那么，关于期望之中的条件，我们就会获得一些想法。现在，围绕 Q 的中心，的确存在着这样一个三维部分。出于这一理由，我们将讨论中心点的条件。

37.1.2 中心点对应着坐标 x_1、x_2、x_3 的取值 0、0、0，而且，正如 35.3.1 中指出过的那样，它代表着这一结构中惟一一个完全对称的博弈。这一博弈的特征函数是：

$$(37:1)\qquad 当 S 有\begin{cases}0\\1\\2\\3\\4\end{cases}个元素时，\quad \mathrm{v}(S)=\begin{cases}0\\-1\\0\\1\\0\end{cases}$$

[见(35:8)]。正如 35.1、35.2 和 36.1 中相应的情况，我们再次从试探性分析开始。

这一博弈显然是这样一个博弈，其中所有策略努力的目的是形成一个三人联盟。被孤立的那个人是一个失败者。从这个意义上说，任何三人联盟都是胜利者，而且如果该博弈中最终形成相互对立的两个二人联盟，那么，这一局面显然应该被解释为“和局”。

这里，定性分析问题是：这一博弈中的目的是一个三

人联盟的形成。有可能，在博弈开始之前的谈判中，一个二人联盟首先形成。然后，这个二人联盟与其余两位玩家谈判，争取他们中的一位来合作对付另一位。值得提出的一个问题是，在保证第三位玩家的合作时，是否允许他享受前面两位玩家的待遇呢？如果这个问题的答案是肯定的，那么，最终联盟的总成果将在三位参与者中间平分：$\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$。如果答案是否定的，那么，最初的两位成员（属于第一个二人联盟）大概会得到相同数额，这一数额大于$\frac{1}{3}$。因此，总成果 1 的分配大致为：$\frac{1}{3}+\varepsilon,\frac{1}{3}+\varepsilon,\frac{1}{3}-2\varepsilon$，$\varepsilon>0$。

37.1.3　第一个选择机会类似于我们在 35.1 中分析点 I 时遇到的情况。这里，如果联盟（1,2,3）真的形成了，那么，它以相同条件包含其三个参与者。第二个选择机会是对应着 36.1 和 36.2 所分析的区间内的情况。这里，不是玩家 4 的任何两位玩家首先结合起来，然后，这一联盟允许其余两位玩家以不那么有利的条件进入联盟。

37.1.4　目前情况与上述两种情况都不完全相似。

在第一种情况中，联盟（1,2）无法向玩家 3 提出尖刻 *315*
的条件，因为他们绝对需要他：如果玩家 3 与玩家 4 结盟，那么，1 和 2 就会被彻底击败；而且，作为一个联盟，（1,2）不能与 4 结合起来对付 3，因为 4 只需他们中的一个就能够取胜（见 35.1.3 中的描述）。在我们目前的博弈中，情况并非如此：联盟（1,2）能够利用 3，也能够利用 4，而且即便 3 和 4 联合起来反对它，结果也只是一个和局。

在第二种情况中，最后进入三人联盟的成员受到歧视是明显的事情，因为最初的二人联盟是一个远比最终的三人联盟更牢固的结构。事实上，由于 x_1 趋于 -1，后一个联盟区域变得没有价值。见 36.1.2 末尾的说明。在我们目前的这个博弈中，不存在如下可识别的性质上的不同：第一(二人)联盟导致失败与导致和局之间的不同，而最终(三人)联盟的形成是在和局与胜利之间做出的选择的结果。

关于这一决策，除了尝试上面提到的两种选择机会之外，我们没有令人满意的基础。不过，在这么做之前，我们的分析的一个重要缺陷值得关注。

37.2 两种选择及对称性的作用

37.2.1 你会注意到，我们将假设上述两种选择中的同一个对三位玩家的所有四个联盟都成立。事实上，我们正在寻找一个对称的解，即它包含分配 $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 及其所有置换。

一般来说，该博弈的对称性并不意味着其每一个解都是对称的。对于三人博弈来说，33.1.1 中讨论的有歧视解十分清楚地说明了这一点。我们将在 37.6 中发现更多此类对称的四人博弈的例子。

然而，有一点是肯定的，即对于试探性的初步研究来说，一个对称博弈的不对称解过于玄妙。(见三人博弈中出现的类似事情。)这正是我们目前仅仅研究对称解的理由。

37.2.2 还要说明的一点是：虽然存在着不对称的

解，像我们上面的两种选择中相应的原理那样，一般组织原理对于全体玩家或部分玩家都是成立的。这一猜测得到如下考虑的加强，即参与者个数仍然很小，且事实上小得不允许有着不同组织原理的若干参与者群体形成。事实上，我们只有四个参与者，且有大量证据表明任何种类的组织都有一个最小人数。这些有点含糊的考虑将在 43.4.2 中的(43:L)的一个特例中得到严格说明。然而，就目前情况而言，我们还不能用严格证明来支持它们。

37.3　中心点处的第一选择

37.3.1　让我们考虑 37.1.2 的两个选择机会。我们 316
按照相反的循序研究它们。

首先，假设最初的两位玩家允许第三位玩家有十分不利的待遇。那么，第一(二人)联盟必须被当作最终联盟的核心。所以，在最后阶段，第一联盟必须被当作一位玩家，与另外两位玩家打交道，从而形成一个三人博弈之类的东西。如果这一观点是站得住脚的，那么，我们就可以重复 36.1.3 的相应分析。

比如，取(1,2)为"第一"联盟，猜测中的三人博弈是玩家(1,2)、3、4 之间的博弈。上面提到的分析完全适用，只需改变数值：$a=0, b=c=1$ 和 $\alpha=1, \beta=\gamma=0$。[①]

由于"第一"联盟可以由任何两位玩家组成，与(第 21—22 节中)关于三人博弈的讨论类似，我们有理由认

① 这里的讨论与前述讨论之间的基本区别是，玩家 4 不再被排除在"第一"联盟之外。——316，①

为，当找到一个盟友时，以及当结果是和局时，联盟成员将平分利益，这里，被平分的数额分别是 1 和 0。[①]

37.3.2 总之：如果上述猜测得到证明，那么，情况如下：

如果“第一”联盟是(1,2)且它成功地找到了盟友，并且在最终联盟中与之结盟的是玩家 3，那么，玩家 1、2、3、4 分别得到数额$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$、0、-1。如果“第一”联盟不成功，即结果是一个和局，那么，这些数额是 0、0、0、0。

如果玩家的分布不同，那么，玩家 1、2、3、4 的相应置换必定适用于上述情况。

所有这些必须接受严格检查。这一试探性的暗示显然对应着下述猜测：

令 V 是如下分配的集合：

(37:2) $\overrightarrow{\alpha'} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -1\}$，$\overrightarrow{\alpha''} = \{0,0,0,0\}$ 和通过玩家（即分量）1、2、3、4 置换由此得到的分配。

我们预计，这个 V 是一个解。

317 像 36.2 中那样的严格分析表明，这个 V 的确是 30.1 意义上的一个解。我们不在这里给出严格分析，主要原因是它被包含在后面将要给出的更为严格的证明之中。（见第 316 页脚注②。）

---

① 这一说法在这种情况下要比在前述情况（或 36.1.3 中等相应应用）中弱得多，因为每个“第一”联盟可以两种方式告终（和局和胜利）。当严格理论得到运用时，我们才能评说这一论证的价值。38.2.1—38.2.3 的证明中实际上包含着这么做的合理性。事实上，它是 38.2.3 中(38:D)的如下特殊情况：

$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$。——316，②

37.4　中心点处的第二选择

37.4.1　接下来，我们假设最终三人联盟以相同条件包含其所有参与者。那么，如果这个联盟是(1,2,3)，玩家1、2、3、4分别得到数额$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{3}$、-1。

不要盲目地据此得出结论说我们指望由此产生的分配集V是一个解，这些分配$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$的集合是：

(37:3)　　$\overrightarrow{\alpha'''}=\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},-1\}$及(37:2)中那样的置换。

我们尚未试着理解，在不假设先前存在着一个二人联盟核心的情况下，最终联盟是如何形成的。

37.4.2　在(37:2)的解中，这样一种解释是清晰可见的。最终联盟有层次的形成表达为分配$\overrightarrow{\alpha'}$，且选择这一分配的动机在于一个和局的威胁，表达为$\overrightarrow{\alpha''}$。严格说：$\overrightarrow{\alpha'}$自身并不形成一个解，只是在它与$\overrightarrow{\alpha''}$结合起来时，它才是一个解。

(37:3)中缺乏上述第二个因素。30.1意义上的直接检查表明，$\overrightarrow{\alpha'''}$满足那里的条件(30:5:a)，但不满足(30:5:b)。也就是说，它们不相互占优，但它们留下一些未被占优的分配。因此，更多元素必须被加入V。①

---

①　要避免的一个误解：不相互占优的分配组成的任何集合都能够被扩展为一个解。一般来说，这一说法并不正确。事实上，识别一个给定的分配集是否是某个(未知的)解的一个子集的问题尚未解决。见30.3.7。

在目前情况下，我们正表达着这样一种希望，即对于(37:3)的V来说，这样一个扩展将被证明是可能的，而且这一希望将在后面得到进一步证明。——317,①

要添加的分配肯定不是(37:2)的$\overrightarrow{\alpha''}=\{0,0,0,0\}$,因为这一分配被$\overrightarrow{\alpha'''}$占优。① 换句话说,如(37:2)的$\overrightarrow{\alpha'}$的情况那样,在(37:3)的情况下,$\overrightarrow{\alpha'''}$扩展成一个解(即4.3.3意义上的稳定化)必须借助一个完全不同的分配(即威胁)来实现。

要为现在必需的步骤找出一个试探性的分析看似十分困难。然而,幸运的是,从此以后,一个严格的过程是可能
318 的,从而使试探性分析不再是必要的。事实上,我们能够严格证明,从(37:3)的V到一个解的扩展是存在的,且是惟一一个对称的扩展。要添加的分配$\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$是:

(37:4) $\overrightarrow{\alpha^{iv}}=\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\}$及(37:2)中那样的置换。

37.4.3 如果需要给这个解——即其组成部分,(37:4)的$\overrightarrow{\alpha^{iv}}$——一个常识性的解释,我们必须说,它不大可能是一个和局[就像(37:2)中相应的$\overrightarrow{\alpha''}$],相反,它似乎是可能的胜利联盟的一部分(两个成员)与另外两个玩家之间的某种妥协。然而,如上所述,我们并不试图为(37:3)和(37:4)的V找一个富有启发性的解释。事实上,这部分严格理论已经使其不大可能。② 另外,后面有些例子将在更广泛的基础上证明这个解的奇妙性。再次,我们不给出上述结果的严格证明。

---

① 用S=(1,2,3)。——317,②

② 当然,这是数学物理理论中常有的事情,尽管数学物理理论源于启发性分析。——318,①

37.5 两个中心解的比较

37.5.1 解(37:2)与解(37:3)、(37:4)都是我们为重心点所对应博弈找到的解,这是解的可能多样性又一个例子。当然,我们在前面就看到过这一现象,即 33.1.1 中的本质三人博弈。但是,在那里,除一个解之外,其余所有解都是不正常的(我们用"歧视"这一术语描述这一现象)。在那种情况下,只有一个解是有限分配集。惟有这个解与博弈本身具有相同的对称性(即对所有玩家对称)。现在,情况则相当不同。我们发现了两个都是有限分配集的解[①],而且它们都有该博弈的充分对称性。37.1.2 的讨论表明,在任何情况下,都难以把这两个解中的任何一个解说成"不正常"或"有歧视"。它们有着基本的不同,其不同在于三人联盟中的最后一个玩家被对待的方式不同,从而看似对应着两个完全正常的社会组织原理。

37.5.2 如果说有什么不正常的话,倒是解(37:3)和(37:4)或许有点不正常。在(37:2)中以及在(37:3)、(37:4)中,解的特征都是由这样一些分配决定的,这些分配分别描述的是完备决策 $\overrightarrow{\alpha'}$ 和 $\overrightarrow{\alpha''}$。对于这些额外"稳定化"分配,$\overrightarrow{\alpha'''}$、$\overrightarrow{\alpha''}$ 不得不被添加上。在第一个解中,这个额外 $\overrightarrow{\alpha''}$ 的一个明显的试探性解释是一个和局,而在第二个解中,额外的 $\overrightarrow{\alpha''}$ 的本质要复杂得多。 319

然而,一个较为全面的分析说明,第一个解的周围有

① 给定的分配及其不同置换的计数并不困难,解(37:2)由 13 个元素组成,而解(37:3)、(37:4)则有 10 个元素。——318,②

一些奇特的现象，这些现象是轻易得到这个解的启发性方法无法解释和无法预见的。

从一般观点来看，这些现象也是相当具有启发性的，因为它们以一种相当引人注目的方式说明了我们的理论的某些可能性和解释。因此，我们将在后面详细分析它们。不过，第二个解的类似扩展至今尚未被发现。

37.6 不对称的中心解

37.6.1 首先，存在着有限个与 37.3.2 中(37:2)有密切联系的不对称解，因为它们包含分配$\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,-1\}$的某些置换。[①] 这些解中的一个是我们从两边沿着对角线 I—中心—VIII 逼近中心并用 36.3 中提到的解得到的那个解。也就是说：它是通过连续拟合那里提到的区域(36:B)和(36:C)来得到的。(点 $x_1=0$，即中心，同时属于这些区域，见 36.3.2。)由于这个解也能够被用于表达特有的社会组织原理，我们将对其进行简要描述。

这个解与属于对角线 I—中心—VIII 上的博弈的解有相同的对称性，就像其中之一实际表现出来的那样：关于玩家 1、2、3 对称，而玩家 4 占据一个特殊地位。[②] 因此，我们将像我们在对角线上做的那样讨论这个解，如 36.2.1 中(36:3)中那样。这里，被禁止的置换只是玩家 1、2、3 的置换，而在(37:3)和(37:4)的描述中，我们禁止了玩家 1、

① 即这个分配的 12 个置换的某些而不是全部。——319,①

② 玩家 4 在这个解中的地位真正不同于其他玩家。正是这一点使这个解有别于上述两个对称解。——319,②

2、3、4 的所有置换。

37.6.2 为便于比较，我们用这一符号（即只允许玩家 1、2、3 的置换）重述 37.3.2 中我们的第一个完全对称解(37:2)。它由如下分配组成：①

(37:2*)
$$\overrightarrow{\beta'} = \{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,-1\}$$
$$\overrightarrow{\beta''} = \{\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1,0\}$$
$$\overrightarrow{\beta'''} = \{\frac{1}{2},0,-1,\frac{1}{2}\}$$
$$\overrightarrow{\beta^{IV}} = \{0,0,0,0\}$$

以及通过置换玩家 1、2、3 从这些分配中得到的分配。

我们所说的（不对称）解由如下分配组成： 320

(37:5)　(37:2*)中那样的 $\overrightarrow{\beta'}$、$\overrightarrow{\beta''}$ 和 $\overrightarrow{\beta^{IV}}$；$\overrightarrow{\beta^{V}} = \{\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\}$②；以及通过置换玩家 1、2、3 从这些分配中得到的分配。

我们再次忽略(37:5)是一个解的证明。不过，我们将对这个解与(37:2)的解——即 37.3.2 中的第一个（对

---

① $\overrightarrow{\beta'}$、$\overrightarrow{\beta''}$、$\overrightarrow{\beta'''}$穷尽了 37.3.2 中(37:2)的 $\overrightarrow{\alpha'}$，$\overrightarrow{\beta^{IV}}$ 是那里的 $\overrightarrow{\alpha''}$。

$\overrightarrow{\alpha'}$必须用$\overrightarrow{\beta'}$、$\overrightarrow{\beta''}$、$\overrightarrow{\beta'''}$这三个分配来表达，因为这个表达体系必须说明玩家 4 在这个分配的三个可能位置（即值$\frac{1}{2}$、0、-1）中的哪一个。——319，③

② $\overrightarrow{\beta^{V}}$ 让人联想到 37.4.2 的(37:4)中 $\overrightarrow{\beta^{IV}}$ 的排列，但是做出那种类似的事情是不可能的。——320，①

称)解——之间的不同做出解释。

37.6.3 这一不同是

$$\overrightarrow{\beta'''}=\left\{\frac{1}{2},0,-1,\frac{1}{2}\right\}$$

被

$$\overrightarrow{\beta^{v}}=\left\{\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0\right\}$$

取代了。也就是说:$\overrightarrow{\beta'''}$——其中玩家 4 本来属于“第一”联盟(见 37.3.1),即属于赢得最大数额$\frac{1}{2}$的组——被消除了,取而代之的是分配$\overrightarrow{\beta^{v}}$。现在,玩家 4 得到的数额少了,而且玩家 1、2、3 中遭受损失的玩家(当前排列中的玩家 3)得到的数额大于$\overrightarrow{\beta'''}$中的数额。这一不同恰好是$\frac{1}{2}$,因此玩家 4 取得了和局的待遇,而玩家 3 从完全失败 -1 变成了中间情况 $-\frac{1}{2}$。

玩家 1、2、3 形成一个“特权”群体,这个群体外部的人不允许进入“第一”联盟。但是,甚至在这个特权群体内的三个成员中间也存在着斗争,因为“第一”联盟只有两位参与者。值得注意的是,如$\overrightarrow{\beta''}$中的情况那样,这个特权群体内的一个成员甚至有可能完全失败,他所属“阶层”按多数原则决定由谁组成“第一”联盟,并由他们决定“没有特权”的玩家 4 有资格成为“最终”联盟的第三个成员。

37.6.4 读者将会注意到,这描述了一个完全可能的社会组织形式。可以肯定的是,这一组织形式是歧视性

的，尽管歧视方式不像三人博弈的“有歧视”解那么简单。它描述了一种较为复杂而精妙的社会关系，这归于这个解而非博弈本身。① 你也许认为，它有一定的随意性，不过，由于我们正在讨论一个规模十分小的“社会”，所有可能的行为标准都必须被相当精确和巧妙地调整到其尽可能的狭义形式。

我们很少需要详述这样一个事实，即对 4 之外的任一玩家（1、2、3）的类似歧视也能够用适当的解来表达，这进 321
一步联系到 Q 的其余三条对角线。

38. 中心点邻近的一族解

38.1 属于中心点处第一种选择的解及其变换

38.1.1 我们继续分析 37.3.2 中解（37:2）的衍生结果。它似乎适合一个特殊的变换而不失去其作为一个解的特征。

这个变换是用一个普通的（正）数值因子 z 去乘 37.3.2 的分配（37:2）。以这种方式，我们得到下列分配集合：

（38:1） $\overrightarrow{\gamma'} = \{\frac{z}{2}, \frac{z}{2}, 0, -z\}$，$\overrightarrow{\gamma''} = \{0,0,0,0\}$ 以及通过置换玩家 1、2、3、4 从这两个分配得到的分配。

① 关于这一特点，见 35.2.4 的讨论。——320，②

为保证这些向量是分配，它们的所有分量都必须≧－1，即v[(i)]的普通值。当$z>0$时，这仅仅意味着$-z\geqq-1$，即我们必须有：

(38:2)　　$0<z\leqq 1$。

对于$z=1$，我们的(38:1)与37.3.2的(37:2)一致。对于(38:2)中其他的z，(38:1)看似不应该是同一博弈的解。然而，简单的讨论表明，当且仅当$z>\frac{2}{3}$，它才是一个解，即(38:2)换成

(38:3)　　$\frac{2}{3}<z\leqq 1$。

这一族解的重要性因这样一个事实而增加了，即它能够被扩展为环绕立方体Q的中心的一个三维体。我们将对此进行详细讨论，因为它提供了一个机会以证明在这些研究中有着广泛用处的一个技术。

这些结果的解释将在后面给出。

38.1.2　我们首先要看到的是，对于37.1.2中(37:1)描述的博弈(即Q的中心)，(38:1)界定的集合V的分析能够被替换另一个博弈中37.3.2中的(37:2)的最初集合V的分析。事实上，我们的(38:1)得自z乘以(37:2)。如不想这样，我们能够保持(37:2)并用$1/z$乘以特征函数(37:1)；这会破坏正规化$\gamma=1$，而$\gamma=1$是用Q进行图示所必需的(见34.2.2)。不过，我们准备接受它。

我们目前的任务能够被描述为：

迄今为止，我们从一个给定的博弈开始，并寻找了解。

322 现在，我们准备把这个过程颠倒过来，从一个解出发，并寻

找博弈。严格说：我们从一个给定的分配集 V 出发，我们的问题是，对于什么样的特征函数 v(S)（即博弈）来说，这个 V 是一个解。①

37.1.2 中(37:1)的 v(S)被一个公因数乘意味着，我们仍然要求

(38:4)　　当 S 是一个二元集时，v(S) = 0，

但是，除此之外，我们只要求该博弈的简化特征（见 27.1.4），即

(38:5)　　v[(1)] = v[(2)] = v[(3)] = v[(4)]。

事实上，(38:5)的连结值是 $-1/z$，从而(38:4)、(38:5)和 25.3.1 中的(25:3:a)、(25:3:b)给出的结果是，这个v(S)正是(37:1)被 $1/z$ 乘。我们的结论(38:3)意味着，37.3.2 中(37:2)的 V 对于(38:4)和(38:5)而言是一个解的充分必要条件是，(38:5)的连结值（即 $-/z$）≦ −1 且 $> -\frac{3}{2}$。

38.1.3　现在，我们进一步，放弃简化条件，即(38:5)。这样，我们只要求 v(S)满足(38:4)，限制其二元集 S

---

① 就存在着的类型和程度来说，这个相反的过程相当具有数学方法的典型特征。虽然从最严格的数学眼光来看，最初它使研究转向了必定被认为不自然的方向，但它是有效的。借助适当的巧妙技术处理，它最终将揭示以其他方式未曾发现过的解。

关于目前这一情况，没有可依赖的试探性分析，只能靠纯粹数学技巧求解，但我们原有的例子之后试探性分析是有指导意义的。

对于不满足于使用这些方法（即纯粹技术的和非概念性的方法）的读者来说，我们认为，这些方法是数学分析中自由而合理地使用的。

我们已经多次发现，试探性方法较严格方法更易于掌握，目前的情况提供了一个相反的例子。——322，①

的取值。我们重述我们的问题的最终形式：

(38:A)　考虑所有四人零和博弈，其中

(38:6)　对于所有二元集 S，$v(S)=0$。

对于这些博弈中的哪一个来说，37.3.2 中(37:2)的集合 V 是一个解？

你将注意到，由于我们不再要求 $v(S)$ 的正规化和简化，与 Q 中的图示的所有联系都是危险的。因此，为了把我们即将得到的结果重新放在 Q 之中，一种特殊的技术处理终归是必要的。

38.2 严格讨论

38.2.1 问题(38:A)的未知数显然是

(38:7)　$v[(1)]=-y_1, v[(2)]=-y_2, v[(3)]=-y_3, v[(4)]=-y_4$。

我们要确定限制(38:A)中条件的什么条件真正约束着数字 y_1、y_2、y_3、y_4。

323 这个博弈不再是对称的。① 因此，只有同时进行 y_1、y_2、y_3、y_4 的置换，玩家 1、2、3、4 的置换才是合理的。②

首先，37.3.2 中(37:2)的向量中与给定的玩家 k 联系着的最小分量是 -1。因此，要使这些向量是分配，当且仅当 $-1 \geqq v[(k)]$，即

(38:8)　$y_k \geqq 1, \quad k=1,2,3,4$。

---

① 除非 $y_1=y_2=y_3=y_4$。——323，①

② 不过，正如我们在 37.3.2 中(37:2)的描述那样，如此使用 1、2、3、4 的置换无可置疑。——323，②

因此，作为一个分配集，V 的特征建立起来了。接下来，让我们看一看它是否是一个解。这一研究类似于36.2.3—36.2.5 中给出的证明。

38.2.2 36.2.3 的(36:5)和(36:6)再次适用。当 $\alpha_i + \alpha_j \leqq 0$ 时，二元集 $S=(i,j)$ 是一个对于 $\vec{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 来说的有效集[见(38:A)]。因此，对于(37:2)的 $\overrightarrow{\alpha'}$ 和 $\overrightarrow{\alpha''}$，我们有：在 $\overrightarrow{\alpha''}$ 中，每个二元集 S 都是有效的。在 $\overrightarrow{\alpha'}$ 中：任何不包含玩家 4 的二元集 S 都不是有效的，而包含玩家 4 的二元集(1,4)、(2,4)、(3,4)显然是有效的。然而，如果我们考虑集合 $S=(1,4)$，我们可以略去另外两个；$S=(2,4)$得自玩家 1、3 对换，而这样的对换不影响 $\overrightarrow{\alpha'}$。[①] 1、3 对换之后，由于 $\frac{1}{2}\geqq 0$，$S=(3,4)$实际上劣于它。[②]

总之：

(38:B)　对于 $\overrightarrow{\alpha'}$ 来说的，二元集(1,4)[③]是肯定必要集；对于 $\overrightarrow{\alpha''}$ 来说，所有二元集都是肯定不必要集。

关于三元集：根据上述结果，我们可以根据(36:6)排除所有对于 $\overrightarrow{\alpha''}$ 而言的三元集，以及包含(1,4)或(2,4)的对于 $\overrightarrow{\alpha'}$

① 尽管有上述脚注①，这一置换及后面的类似置换显然是合理的工具。见第 309 页脚注①和上面的脚注②。——323，③

② 当 v[(4)] = −1，即 $y_4=1$ 时，由于 $\alpha_4'=-1$ 时，我们能够忽略所有这些集合，包括 $S=(1,4)$。但是，我们不必这么做。我们宁愿不那么做，为的是既能够使 $y_4=1$，也能够使 $y_4>1$。——323，④

③ 以及 1、2、3、4 的所有置换；这些也改变 $\overrightarrow{\alpha'}$。——323，⑤

而言的那些三元集。[1] 这只剩下对于$\overrightarrow{\alpha'}$而言的$S=(1,2,3)$。

总之：

(38:C) 对于$\overrightarrow{\alpha'}$来说，三元集(1,2,3)是肯定必要集，其他三元集都是肯定不必要集。

324 我们请读者验证30.1.1中的(30:5:a)，即不存在V中的$\overrightarrow{\alpha'}$占优V中的$\vec{\beta}$。[见36.2.4中证明的相应部分。实际上，后面的(30:5:b)的证明中也包含这些必要步骤。]

38.2.3 接下来，我们验证30.1.1中的(30:5:b)，即不被V的元素占优的一个分配$\vec{\beta}$必定属于V。

考虑不被V的元素占优的一个$\vec{\beta}$。如果β_1、β_2、β_3、β_4中任意两个<0，我们就能够（通过置换1、2、3、4）使β_1、$\beta_2<0$。这给出(38:B)的用$S=(1,2)$，$\overrightarrow{\alpha''}\succ\vec{\beta}$。因此，$\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$、$\beta_4$中至多有一个$<0$。如果都不$<0$，那么，它们都$\geqq 0$。这样，$\vec{\beta}$的每个分量都$\geqq\overrightarrow{\alpha''}$的相应分量，加之两者都是分配（见第311页脚注②），所以它们相同，$\vec{\beta}=\overrightarrow{\alpha''}$，且它属于V。

所以，β_1、β_2、β_3、β_4中恰好有一个<0。通过置换1、2、3、4，我们能够使这个小于零的分量是β_4。

如果β_1、β_2、β_3中任意两个$<\frac{1}{2}$，我们就能够通过置换1、2、3使β_1、$\beta_2<\frac{1}{2}$。另外，$\beta_4<0$。这样，3和4的置换给出(38:C)，用$S=(1,2,3)$，$\overrightarrow{\alpha'}\succ\vec{\beta}$。因此，$\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$中至多有一个$<\frac{1}{2}$。如果都不$<\frac{1}{2}$，那么，$\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$都$\geqq\frac{1}{2}$。从

[1] 后者是通过对换玩家1、2从前者得到的，这不影响$\overrightarrow{\alpha'}$。——323，⑥

而，$\beta_4 \leqq -\frac{3}{2}$。但是，$\beta_4 \geqq v[(4)] = -\gamma_4$，所以这必然要求 $-\gamma_4 \leqq -\frac{3}{2}$，即 $\gamma_4 \geqq \frac{3}{2}$。故，要排除这种可能性，我们需要 $\gamma_4 < \frac{3}{2}$。而且，由于我们可以自由地置换 1、2、3、4，我们甚至要求

(38:9)　　$\gamma_k < \frac{3}{2}$，　$k = 1,2,3,4$。

若这一条件得到满足，那么，我们就能够下结论说，β_1、β_2、β_3 中恰好有一个 $<\frac{1}{2}$。通过置换 1、2、3，我们能够使其是 β_3。

这样，β_1、$\beta_2 \geqq \frac{1}{2}$，$\beta_3 \geqq 0$。如果 $\beta_4 \geqq -1$①，那么，$\vec{\beta}$ 的每个分量 $\geqq \vec{\alpha'}$ 的相应分量，加之两者都是分配（见第 311 页脚注②），它们相同：$\vec{\beta} = \vec{\alpha'}$ 且属于 V。

所以，$\beta_4 < -1$。又，$\beta_3 < \frac{1}{2}$。故，1 和 3 的对换给出，用(38:B)的 $S = (1,4)$，$\vec{\alpha'} \succ \vec{\beta}$。

最终，这是一个矛盾，从而完成了 30.1.1 中(30:5:b)的验证。

这一证明中需要的条件(38:9)事实上是必要条件：不难证明，

$$\vec{\beta'} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$$

---

① 如果 $v[(4)] = -1$，即如果 $\gamma_4 = -1$，那么，情况肯定是这样。但是，我们不想做出这一假设。（见第 323 页脚注④。）——324，①

325 不被我们的 V 占优，且防止它是一个分配的惟一办法是使 $-\frac{3}{2}<\mathrm{v}[(4)]$，即 $y_4<\frac{3}{2}$。① 置换 1、2、3、4 给出(38:9)。

因此，我们恰好需要(38:8)和(38:9)。总之：

(38:D) 37.3.2 中(37:2)的 V 是(38:A)的一个博弈[那里的(38:6)，(38:7)]的一个解，当且仅当，

(38:10) $$1 \leqq y_k < \frac{3}{2}, \quad k=1,2,3,4。$$

38.2.4 接下来，我们重新引入我们在前面暂时放弃的正规化和简化，正如(38:A)后面直接指出的那样，这是将这些结果与 Q 联系起来所必需的。

27.1.4 的简化公式表明，玩家 k 的份额必须用那里的数额 α_k^0 替换

$$\alpha_k^0 = -\mathrm{v}[(k)] + \frac{1}{4}\{\mathrm{v}[(1)] + \mathrm{v}[(2)] + \mathrm{v}[(3)] + \mathrm{v}[(4)]\}$$

$$= y_k - \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4),$$

---

① 要看到，V 未能占优这个 $\overrightarrow{\beta'}$ 并不能通过把 $\overrightarrow{\beta'}$ 添加到 V 之中的办法来纠正。事实上，$\overrightarrow{\beta'}$ 占优 用 $S=(1,2,3)$，$\overrightarrow{\alpha''}=\{0,0,0,0\}$，所以从 V 中将 $\overrightarrow{\alpha''}$ 去掉是必要的，从而创造了新的不被占优的分配等。

如果 $y_1=y_2=y_3=y_4=\frac{3}{2}$，那么，用 $\frac{2}{3}$ 改变计算单位将我们的博弈变回 37.4.1 中(37:1)的形式，且上述 $\overrightarrow{\beta'}$ 变成 $\overrightarrow{\alpha'''}=\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},-1\}$。将我们的 V 变成一个解的进一步努力大概会将其逐步变成 37.4.1—37.4.2 中的(37:3)、(37:4)。这是值得的，因为我们是从 37.3.2 中(37:2)开始的。

解(37:2)与解(37:3)、(37:4)之间的这些联系应该得到进一步研究。——325，①

且

$$\gamma = -\frac{1}{4}\{v[(1)] + v[(2)] + v[(3)] + v[(4)]\}$$

$$= \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)。$$

对于二元集 $S=(i,j)$，$v(S)$ 从其最初的值 0 增加到了

$$\alpha_i^0 + \alpha_j^0 = y_i + y_j - \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

$$= \frac{1}{2}(y_i + y_j - y_k - y_l)$$

（k、l 是不同于 i、j 的两位玩家）。

根据(38:10)，显然上述 $\gamma \geqq 1 > 0$，从而这个博弈是一个本质博弈。用 γ 去除特征函数和每位玩家的份额就实现了正规化。所以，对于 $S=(i,j)$，$v(S)$ 进一步变成

$$\frac{\alpha_i^0 + \alpha_j^0}{\gamma} = 2\,\frac{y_i + y_j - y_k - y_l}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}。$$

如我们在 34.2.1 中对 Q 所代表的情况所做的那样，这是正规化和简化的特征函数。(34:2)与上述公式合起来给出 Q 中的坐标 x_1、x_2、x_3：

326

(38:11)
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{y_1 + y_1 + y_3 + y_4}, \\ x_2 = \dfrac{-y_1 + y_2 - y_3 + y_4}{y_1 + y_1 + y_3 + y_4}, \\ x_3 = \dfrac{-y_1 - y_2 + y_3 + y_4}{y_1 + y_1 + y_3 + y_4}。\end{cases}$$

38.2.5　所以，(38:10)和(38:11)合起来界定 Q 的一个部分，在这一部分中，这些解——即转变为上述解的

37.3.2 中的解(37:2)——能够被使用。这个定义是详尽的,却是隐含的。让我们将其明确。也就是说,对于 Q 中有坐标 x_1、x_2、x_3 的点,让我们确定,(38:10)和(38:11)是否能够由恰当的 y_1、y_2、y_3、y_4 来满足。

我们令假设中的 y_1、y_2、y_3、y_4 满足

(38:12) $$y_1+y_2+y_3+y_4=\frac{4}{z}$$

其中 z 有待确定,那么,方程(38:11)变成

(38:12*) $$\begin{cases} y_1-y_2-y_3+y_4=\dfrac{4x_1}{z}, \\ -y_1+y_2-y_3+y_4=\dfrac{4x_2}{z}, \\ -y_1-y_2+y_3+y_4=\dfrac{4x_3}{z}。\end{cases}$$

对 y_1、y_2、y_3、y_4 求解(38:12)和(38:12*)得:

(38:13) $$\begin{cases} y_1=\dfrac{1+x_1-x_2-x_3}{z}, & y_2=\dfrac{1-x_1+x_2-x_3}{z}, \\ y_3=\dfrac{1-x_1-x_2+x_3}{z}, & y_4=\dfrac{1+x_1+x_2+x_3}{z}。\end{cases}$$

现在,(38:11)得到满足,而且我们必须使用我们选择 z 的自由使(38:10)得到满足。

令 w、v 分别是下述四个数中的最大的和最小的:

(38:14) $$\begin{aligned} u_1&=1+x_1-x_2-x_3, & u_2&=1-x_1+x_2-x_3, \\ u_3&=1-x_1-x_2+x_3, & u_4&=1+x_1+x_2+x_3。\end{aligned}$$

由于 x_1、x_2、x_3 是被假定的,这些数是已知的。

(38:10)明显意味着,$1\leqq v/z$ 且 $w/z<\dfrac{3}{2}$,即这意味着,

(38:15) $$\frac{2}{3}w < z \leqq v。$$

显然,要使这一条件得到满足,当且仅当

(38:16) $$\frac{2}{3}w < v。$$

而且,如果(38:16)得到满足,那么,条件(38:15)允许无穷多个 z 值——整个区间。 327

38.2.6 在根据(38:15)和(38:16)给出任何结论之前,我们给出明确公式以表明 37.3.2 的解(37:2)因为我们的变换而变成了什么。我们必须取那里的 $\overrightarrow{\alpha'}$、$\overrightarrow{\alpha''}$,在第 k 个分量(即第 k 个玩家的份额)上加上 α_k 并除以 γ。

这个巧妙的变换将第 k 个分量——它们是(37:2)的 $\frac{1}{2}$、0、-1——的可能值进行了变换。我们首先考虑 $k=1$ 并使用上面关于 α_k 和 γ 的表达式以及(38:13),那么,

$$\frac{1}{2}\text{变成}\frac{\frac{1}{2}+\alpha_1}{\gamma}=\frac{2+4y_1-(y_1+y_2+y_3+y_4)}{y_1+y_2+y_3+y_4}$$

$$=\frac{z}{2}+x_1-x_2-x_3,$$

$$0\text{ 变成}\frac{\alpha_1}{\gamma}=\frac{4y_1-(y_1+y_2+y_3+y_4)}{y_1+y_2+y_3+y_4}$$

$$=x_1-x_2-x_3,$$

$$-1\text{ 变成}\frac{-1+\alpha_1}{\gamma}=\frac{-4+4y_1-(y_1+y_2+y_3+y_4)}{y_1+y_2+y_3+y_4}$$

$$=-z+x_1-x_2-x_3。$$

对于 $k=2,3,4$,只需将这些表达式中的 $x_1-x_2-x_3$ 分别换

成 $-x_1+x_2-x_3$，$-x_1-x_2+x_3$，$x_1+x_2+x_3$。①

总结[并回顾(38:14)]：

(38:E)　　第 k 个分量被以如下方式变换：

$\frac{1}{2}$变成 $z/2+u_k-1$，

0 变成 u_k-1，

-1 变成 $-z+u_k-1$，

u_1、u_2、u_3、u_4 由(38:14)定义。

我们请读者用(38:E)重述(37:2)，注意正确给出必要的玩家 1、2、3、4 置换。

你将会注意到，对于中心——即 $x_1=x_2=x_3=x_4=0$，(38:E)重新给出 38.1.1 的公式(38:1)。

38.2.7　接下来，我们回头讨论(38:15)和(38:16)。

条件(38:16)表明，(38:14)的四个数 u_1、u_2、u_3、u_4 相距不太远——其最小的一个大于其最大的一个的$\frac{2}{3}$，即相对地它们的大小相差不超过 2:3。

在中心点，$x_1=x_2=x_3=0$，情况肯定是这样，u_1、u_2、u_3

328 和 u_4 都 $=1$。所以，在这种情况下，$v=w=1$，且(38:15)变成$\frac{2}{3}<z\leqq 1$，这证明了这一讨论中较早时给出的断言(见 38.1.1)。

用 Z 记 Q 中(38:16)成立的部分，那么，中心点的一

---

① 由(38:13)的形式，这些结果是直接的；而且，如 34.3.2 中描述的那样，考虑玩家 1、2、3、4 置换对坐标 x_1、x_2、x_3 的影响也同样给出这些结果。——327，①

个充分小的邻近属于 Z。① 这样，Z 是 Q 内部的一个三维体，其中包含着中心。

我们还能够表达 Z 与 Q 的对角线的关系，如其与 I—中心—VIII 的关系。Z 包含着该对角线的如下部分（使用图 64）：在一个方向上，它恰好包含 C；在另一个方向上，它略微小于 B 的一半。② 我们补充一点：这些解不同于 36.3 中提到的（36:B）和（36:C）中成立的一族解。

38.3 上述解的解释

38.3.1 我们已经确定的一族解具有若干值得说明的特点。

第一，我们注意到，对于以这个族为一个解的每一个

---

① 如果 x_1、x_2、x_3 与 0 相差 $<\frac{1}{15}$，那么，(38:14) 的 u_1、u_2、u_3、u_4 中的每一个都 $<1+\frac{3}{15}=\frac{6}{5}$ 且 $>1-\frac{3}{15}=\frac{4}{5}$，所以，相对来说，它们相差 $<\frac{6}{5}:\frac{4}{5}=\frac{3}{2}$。这样，我们仍然在 Z 之内。换句话说：Z 包含一个立方体，它与 Q 有同一个中心，但其大小（边长）是 Q 的 $\frac{1}{15}$。

实际上，Z 更大一些，其体积大约是 Q 的体积的 $\frac{1}{1000}$。——328，①

② 在该对角线上，$x_1=x_2=x_3$，所以 u_1、u_2、u_3、u_4 是：（三倍于）$1-x_1$ 和 $1+3x_1$。故，对于 $x\geqq 0$，$v=1-x_1$，$w=1+3x_1$，从而 (38:16) 变成 $x_1<\frac{1}{9}$。而且，对于 $x_1\leqq 0$，$v=1+3x_1$，$w=1-x_1$，从而 (38:16) 变得 $>-\frac{1}{11}$。所以，相交的部分是：

$$0\leqq x_1<\frac{1}{9}\quad（这正是 C）$$

$$0\geqq x_1>-\frac{1}{11}\quad（B 是 0\geqq x_1>-\frac{1}{5}）。$$ ——328，②

博弈(即 Z 的每一点处)来说,它给出无穷多个解。[①] 我们在 37.5.1 所说的一切再次适用:这些解是有限分配集[②]且具有该博弈的充分对称性。[③] 因此,这些解任何一个之中都不存在"歧视"。也无法赋予它们我们在前面讨论过的"组织原理"上的差异。不过,存在着一个简单的"组织原理",我们能够对其进行定性的口头描述以区别这些解。这是我们接下来的任务。

38.3.2 考虑(38:E),它表达的是服从 37.3.2 中(37:2)的变化。显然,对于玩家 k 来说,这个解中最坏的可能结果是最后一个表达式(因为这对应着 -1),即 $-z+u_k-1$。视 $z<$ 或 $=u_k$,该表达式 $>$ 或 $=-1$。现在,u_1、u_2、u_3、u_4 是(38:14)中的四个数,其中最小的一个是 v。根据(38:15),$z\leqq v$,即总有 $-z+u_k-1\geqq-1$,而且 $=$ 仅仅发生在 z 的最大可能值,$z=v$,从而这仅仅是对于 u_k 取得其最小值 v 的玩家 k 来说的。

329 我们将这重述为:

(38:F) 在这一族解中,哪怕是最坏的结果,一般来说,玩家 k 面对的情况也肯定优于他独自行动能够得到的结果,即 $v[(k)]=-1$。这一优势消失的惟一情况是,z 有其最大可能值

① 我们找到的这个解包含 4 个参数:y_1、y_2、y_3、y_4,而博弈以其作为解的博弈却只有三个参数:x_1、x_2、x_3。——328,③

② 像 37.3.2 中的(37:2)那样,每一个有 13 个元素。——328,④

③ 在中心处,$x_1=x_2=x_3=0$,我们有 $y_1=y_2=y_3=y_4$[见(38:13)],即关于 1、2、3、4 对称。在该对角线上,$x_1=x_2=x_3$,我们有 $y_1=y_2=y_3=y_4$[见(38:13)],即关于 1、2、3 对称。——328,⑤

即 $z=v$，而且是对于这样一个玩家 k 来说，(38:14)中相应的 u_1、u_2、u_3、u_4 达到(38:14)中的最小值。

换句话说：在这些解中，一个失败的玩家一般来说没有被完全"剥夺"，没有被逼到可能的最差处境——他独自行动能够得到的数额，即 $v[(k)]=-1$。在 33.1 中讨论三人博弈的"轻度""歧视"解(即 $c>-1$ 时，见 33.1.2 末尾)时，我们看到过一个胜利联盟的这一部分受到的此类约束。但是，在任何一个解中，只有一位玩家能够成为这一约束的对象，而且这一现象伴随他被逐出加入联盟的竞争而消失。现在，不存在歧视或隔离，相反，这一约束适用于所有的玩家，而且，在 Q 的中心[38.1.1 中(38:1)，$z<1$]，解甚至是对称的！[①]

38.3.3　即使 z 取得其最小值 v，一般来说，只有一位玩家失去这一优势，又因为(38:14)的四个数字 u_1、u_2、u_3、u_4 一般来说是相互不同的且只有一个等于它们的最小值

---

① 也存在着具有某种意义的量上的差异。在我们当前的结构(四人博弈，Q 的中心)和 33.1 意义上的三人博弈中(在我们找到的这个解中)，一位玩家都能够得到的最好结果都是 $\frac{1}{2}$，且最坏的结果是 -1。

我们在找到的他没有被完全"剥夺的"那些解中，失败情况下他可能得到的上限是 $-\frac{2}{3}$(即 $-z$，而 $\frac{2}{3}<z\leq 1$)，而那时(即 $-1\leq c<\frac{1}{2}$)，它是 $\frac{1}{2}$。所以，这个区域现在包含有意义的区间的比例是 $\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)-(-1)}{\frac{1}{2}-(-1)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{9}$，即 $22\frac{2}{9}\%$，而那时它覆盖 100%。——329，①

v。只有当 u_1、u_2、u_3、u_4 都等于其最小值 v，即它们都相等时，全部四位玩家才会同时失去这一优势，而(38:14)告诉我们，这种情况只会发生在 $x_1=x_2=x_3=0$，即中心。

不彻底"剥夺"失败的玩家，这一现象是我们的解——即社会组织——的一个十分重要的可能(而非必然)特征。在一般理论中，它还有着更为重要的作用。

我们的结论是，我们在 36.3.2 中提到而未能描述的解中有些也具有这一特点。它们是图 64 的 C 中的解。不过，它们终归不同于我们这里考虑的解。

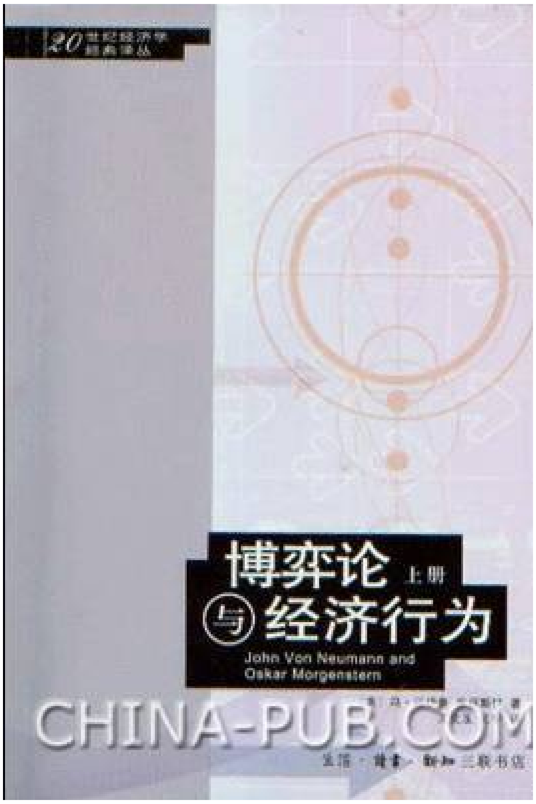
20 世纪经济学
经典译丛

上册

博弈论与经济行为

[美] 冯·诺伊曼　摩根斯顿 著
王文玉 王宇 译

生活·讀書·新知 三联书店


20世纪经济学经典译丛
博弈论与经济行为 上册
John Von Neumann and
Oskar Morgenstern
CHINA-PUB.COM
生活·讀書·新知三联书店

20世纪经济学经典译丛

← 博弈论与经济行为 Ⅰ

Theory of Games and Economic Behavior

出 版 说 明

目前为止，国内已经出版了四套有一定影响的经济学译丛。它们是:1.商务印书馆的"汉译世界学术名著丛书"经济学部分，其特点是"马克思主义诞生以前的古典学术著作，适当介绍当代具有定评的各派代表作品";2.80年代北京经济学院出版社出版的"诺贝尔经济学奖获得者著作丛书"，其特点是获诺贝尔经济学奖的著作;3.80年代上海三联出版的"当代经济学译库"，其定位是当代经济学的名人名著;4.90年代后期中国人民大学出版社开始出版的"经济科学译丛"则以经济学教科书为主。这四套译丛定位各异，互不重叠，从而赢得了市场份额。

我们编辑出版的这套译丛，把时间限定在20世纪，想重点体现时代特点，反映20世纪经济学所关注的问题，汇集20世纪的经济学成果，为我们现在的改革提供一个参照系统，意义在现实性。

丛书主编　梁小民

第一版序

本书内容是关于博弈数学理论的阐述及应用。该理论是由我们两人之中的一个从1928年开始发展起来的。本书把这一理论第一次完整地呈现在读者面前。该理论的应用分两类:一是其在真正意义上的博弈问题中的应用,二是其在经济和社会问题中的应用。正如我们希望证明的那样,经济和社会问题可以从这个角度得到最好的解释。 V

我们将把这一理论应用于一些普通博弈之中,与其说是为了研究这些博弈,不如说是为了证实我们的理论。两者之间的相互促进将随着我们的研究进程变得越来越清晰。当然,我们的主要兴趣还是在经济和社会方面。这里,我们只能够探讨一些最简单的问题。不过,这些问题都是最基本的问题。另外,我们的最初目的是希望证明,研究如下问题的精确方法是存在的:利益的一致与对立、完善或不完善信息、自由的理性决策或机会因素的影响。

诺伊曼

摩根斯顿

1943年1月　于普林斯顿

第二版序

第二版只是对第一版进行了一些小的改动。我们尽可能彻底地改正了印刷上的错误,并希望借此机会感谢那些在这方面曾经帮助过我们的几位读者。在这一版中,我们增加了一个附录,其内容是数字效用的公理化推导。这个问题在正文中有详细的讨论,主要是第 3 节中的定性分析。第一版中曾许诺的这个证明在一本期刊中发表,后来我们发现,将其作为一个附录也许更方便一些。本来,我们还计划增加更多附录,这些附录是关于工业布局的理论、四人博弈和五人博弈问题研究等,但是由于更为紧迫的其他工作而被迫放弃。

自第一版问世以来,出现了许多与这个题目有关的文章。

对数学感兴趣的读者也许已经注意到下面的著作或文章:关于统计估计的基础,沃尔德(A. Wald)发展了一种新理论,它密切联系并运用到了二人零和博弈理论["最大
Vi 风险最小化统计决策函数",《数学年报》,第 46 卷(1945),第 265—280 页]。他还把二人零和博弈的主定理(见 17.6)推广到了特定连续—无穷—情形["诺伊曼的一个二人零和博弈定理的推广",《数学年报》,第 46 卷(1945),第 281—

286 页]。鲁密斯(L. H. Loomis)["论诺伊曼的一个定理",Proc. Nat. Acad.,第 32 卷(1946)第 213—215 页]给出了这一定理的一个新的十分简单的初等证明(它也覆盖了第 154 页脚注①中提到的更为一般的定理)。再有,卡普兰斯基(I. Kaplanski)得出了有关二人零和博弈中纯策略和混合策略的一些有意思的结果["对诺伊曼的博弈论的一个贡献",《数学年报》,第 46 卷(1945),第 474—479 页]。我们也倾向于回到这一问题的数学方面。切沃雷(C. Chevalley)解决了第 258 页脚注中提到的群论问题。

对经济学有兴趣的读者可以阅读赫威茨(L. Hurwicz)["经济行为",《美国经济评论》,第 35 卷(1945),第 909—925 页]和马斯查克(J. Marschak)["诺伊曼和摩根斯顿的静态经济学新方法",《政治经济学杂志》,第 54 卷(1946),第 97—115 页]的分析,其中对本书中一些问题的分析和描述更容易理解。

诺伊曼

摩根斯顿

1946 年 9 月　于普林斯顿

第三版序

Vii 第三版与第二版的不同之处,仅仅在于进一步改正了我们发现的印刷错误。我们也想借此机会感谢在这方面向我们提供帮助的读者。

自从第二版问世以来,有关这一主题的研究文献迅速增加。在写这个序的时候,一个全面的文献目录已经包括数以百计的著作和文章。我们不想在这里给出这样一个文献目录,而仅仅列举有关这个题目的一些著作:

(1)库恩(H. W. Kuhn)和塔克(A. W. Tucker)(编辑),“博弈论进展(I)”,《数学年报》,第24号,普林斯顿(1950),其中包括13位作者的15篇文章。

(2)库恩和塔克(编辑),“博弈论进展(II)”,《数学年报》,第28号,普林斯顿(1953),其中包括22位作者的21篇文章。

(3)迈克多纳尔多(J. McDonald),《扑克、商业和战争中的策略》,纽约(1550)。

(4)迈克金西(J. C. C. McKinsey),《博弈论入门》,纽约(1952)。

(5)沃尔德,《统计决策函数》,纽约(1950)。

(6)威廉姆斯(J. Williams),《成熟的谋士、博弈论的

初学者》,纽约(1953)。

除(6)之外,上述著作中都可以找到与这个题目有关的参考文献目录。在过去的几年中,加利福尼亚圣莫尼卡的兰德公司的研究人员也在这个领域做了大量工作。有关这些工作的文献目录见兰德的出版物,第 RM－950 号。

在 n 人博弈理论中,关于"非合作"博弈问题的研究取得了一些进展。在这方面,尤其值得一提的是纳什(J. F. Nash)的工作["非合作博弈",《数学年报》,第 54 卷(1951),第 286—295 页]。(1)、(2)和(4)中也提到了这一点。

关于经济学的发展,特别值得一提的是关于"线性规划"和"分配问题"方面的研究,它们呈现出与博弈论越来越密切的联系。读者会在(1)、(2)和(4)再次发现这种现象。

1.3 节和第二版增加的附录中提出了效用理论,这一理论已经在理论、实验和各种各样的讨论中有了相当大的进展。这方面,读者可以参阅如下著作:

弗里德曼(M. Friedman)和萨维奇(L. J. Savage),"包含风险的选择的效用分析",《政治经济学》,第 56 卷(1948),第 279—304 页。

马斯查克,"理性行为、不确定前景和可度量的效用",《计量经济学》,第 18 卷(1950),第 111—141 页。 *Viii*

莫斯泰勒(F. Mosteller)和诺吉(P. Nogee),"效用的一个实验度量",《政治经济学》,第 59 卷(1951),第 371—404 页。

弗里德曼和萨维奇,"期望效用假说和效用的可测

性”,《政治经济学》,第60卷(1952),第463—474页。

也可参见《计量经济学》的基数效用专题论丛,第20卷(1952):

沃尔德,“序数偏好还是基数效用”。

梅恩(A. S. Manne),“强独立性假设——汽油混合物和概率混合物”。

萨缪尔森(P. A. Samuelson),“概率、效用和独立性公理”。

马林夫得(E. Malinvaud),“诺伊曼—摩根斯顿的强独立性公理注释”。

关于上述专题研究中几位作者的方法论批判问题,我们想说明的是,我们以习惯的方式谨慎地应用了公理化方法。因此,(3.6节和附录中的)效用概念的严格公理化描述被辅以(3.1—3.5节中的)试探性准备讨论。后者的作用是向读者传递一些观点,以评价和界定随后的公理化过程成立与否。尤其是,我们的讨论和那些章节中“自然运算”的选取覆盖了萨缪尔森—马林夫得“独立性公理”,而这一公理对于我们的研究工作来说是非常有意义的,也是非常基础性的。

诺伊曼

摩根斯顿

1953年1月　于普林斯顿

技术说明

在很多情况下，本书所研究问题的本质和所使用的技巧使得我们必须运用纯粹的数学分析方法。其中没有怎么用到高等代数或微积分等，从这个意义上说，我们运用的只是初等数学。（两个不太重要的例外是：19.7 中的理论讨论和 A.3.3 中的说明中使用了简单的积分。）集合论、线性几何和群论的一些概念在这本书中发挥了重要作用，不过，它们也都是从这些学科的基础章节中被照搬过来的，而且，我们在一些章节中对之进行了翻来覆去的分析和解释。但是，本书毕竟不是一本入门书，因为数学演绎总是相对更难理解一些，更何况本书还广泛运用了逻辑学。

很难说当代数学中的哪一分支学科及其哪一部分是必需的。不过，要想比较透彻地了解本书所分析的问题，读者必须超越传统的数学推理方式，这些推理主要是数理逻辑、集合论和泛函分析式的推理。

我们以这种方式展现这个题目，为的是使那些精通数学的读者有机会体验这一研究过程。我们希望我们的这一努力会有所收获。

相应地，我们的论述没有完全按照数学本应该有的分

析方式进行，所有的定义和演绎都比其本应有的更加宽泛。另外，纯粹文字讨论和分析也占有相当大的篇幅。尤其是，我们尽可能给出主要数学演绎的文字解释。我们希望，这一过程将用非数学的语言阐明数学方法所要表达的内容——并说明，在什么地方，它会给出数学演绎所不能给出的结果。

结合我们的方法论立场，我们将遵从理论物理学这个优秀典范来进行我们的分析。

对数学不大感兴趣的读者应该略去那些数学太多、太复杂的章节。我们没有明确列出这些章节，因为这纯属读者的个人判断问题。不过，对于一般读者来说，目录中带有星号的章节有可能是数学太多的章节。读者会发现，从严格意义上说，略去这些章节会暂时断开本书逻辑上的链条，但对前面部分的理解影响不大。越来越深入地阅读下去的时候，略去的那些章节将变得越来越重要，演绎中的缺陷也将变得越来越明显。这时，建议读者重新从头开始阅读，越熟悉就越易于理解。

致 谢

作者感谢普林斯顿大学和该校高等研究院，没有它们的真诚帮助，本书就不可能出版。

我们也深深感谢普林斯顿大学出版社在战时困难的条件下，为本书出版所付出的诸多努力。本书出版者最大限度地理解了作者的意图。

图书在版编目(CIP)数据

博弈论与经济行为/(美)冯·诺伊曼、摩根斯顿著;王文玉,王宇译. -北京:生活·读书·新知三联书店,2004.12
(2005.6 重印)
(20 世纪经济学经典译丛)
ISBN 7-108-02152-8

Ⅰ.博… Ⅱ.①摩… ②王… ③王… Ⅲ.对策论-应用-经济学 Ⅳ.F224.32

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 079489 号